

Calcul différentiel avancé

Filière Licence Mathématiques et Modélisation
Numérique
Deuxième Année

Dr Mohamed A. SANA
UNIVERSITÉ VIRTUELLE DE COTE D'IVOIRE

2026-2027

Table des matières

3	Intégrales doubles-Techniques de calcul	1
3.4	Formule de Green-Riemann	1

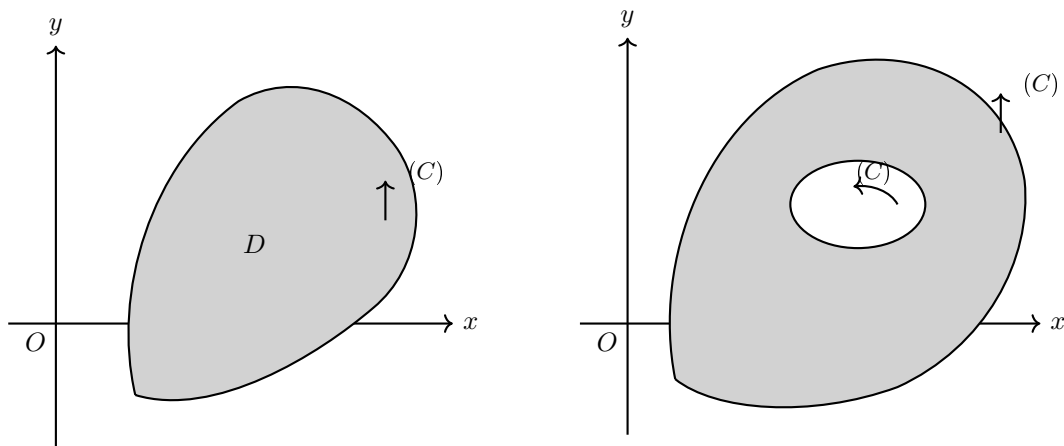
Chapitre 3

Intégrales doubles-Techniques de calcul

3.4 Formule de Green-Riemann

Théorème 3.1 (Formule de Green-Riemann). Soient D un compact « simple » de $\mathbb{R}^2$, limité par une courbe fermée (C) de classe C^1 par morceaux, orientée dans le sens direct, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant D , $P, Q : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U . Alors :

$$\int_{(C)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy.$$



Remarque. 1. Si ω est fermée et U est étoilé, on retrouve $\int_{(C)} \omega = 0$ (cf. 13.1.4, p. 230).

2. Si $(P = -y, Q = 0)$ ou $(P = 0, Q = x)$, on retrouve l'expression d'une aire plane à l'aide d'une intégrale curviligne (13.1.6, p. 234) ou d'une intégrale double (13.2.3, Prop. 1, p. 244).

Exemple. On considère le domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

et la forme différentielle

$$\omega = xy^2 dx + 2xy dy.$$

On souhaite calculer l'intégrale curviligne $\oint_{\partial D} \omega$, où ∂D est parcouru dans le sens direct (sens trigonométrique).

1. Paramétrage de ∂D

Le bord ∂D est parcouru dans le sens direct. Il est constitué de trois morceaux.

1. Segment sur l'axe Ox :

$$\gamma_1(t) = (t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Comme $y = 0$, on a

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0.$$

2. Quart de cercle :

$$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Alors $dx = -\sin t \, dt$ et $dy = \cos t \, dt$. Donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \omega &= \int_0^{\pi/2} (-\cos t \sin^3 t + 2 \cos^2 t \sin t) \, dt \\ &= \left[-\frac{\sin^4 t}{4} + \frac{2 \cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

3. Segment sur l'axe Oy :

$$\gamma_3(t) = (0, 1-t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Comme $x = 0$, on a

$$\int_{\gamma_3} \omega = 0.$$

Ainsi,

$$\int_{\partial D} \omega = 0 + \frac{5}{12} + 0 = \boxed{\frac{5}{12}}.$$

Les deux méthodes donnent donc bien :

$$\boxed{\int_{\partial D} \omega = \frac{5}{12}}.$$

2. Formule de Green–Riemann

On pose

$$P(x, y) = xy^2, \quad Q(x, y) = 2xy.$$

On calcule

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy.$$

La formule de Green–Riemann donne

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

Donc

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D 2y(1-x) \, dx \, dy.$$

Le domaine D est décrit par

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \omega &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 2y(1-x) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 (1-x)(1-x^2) \, dx \\ &= \int_0^1 (1-x-x^2+x^3) \, dx \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ &= \boxed{\frac{5}{12}}. \end{aligned}$$