

Calcul différentiel avancé

Filière Licence Mathématiques et Modélisation
Numérique
Deuxième Année

Dr Mohamed A. SANA
UNIVERSITÉ VIRTUELLE DE COTE D'IVOIRE

2026-2027

Table des matières

1	Compléments de calcul différentiel en dimension finie	1
1.1	Suites de Cauchy et complétude de $\mathbb{R}^n$	1
1.1.1	Suites de Cauchy	1
1.1.2	Parties complètes	2
1.1.3	Exemples d'espaces de Banach	2
1.1.4	Applications linéaires continues	2
1.1.5	Fonctions différentiables	4
1.1.6	Différentielle d'une application de classe C^1	4
1.1.7	Différentielle et dérivées partielles	5
1.1.8	Matrice jacobienne	6
1.1.9	Différentielle de fonctions composées	6

Chapitre 1

Compléments de calcul différentiel en dimension finie

1.1 Suites de Cauchy et complétude de $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Suites de Cauchy

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et d la distance associée à la norme.

Définition 1.1. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite **de Cauchy** si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (p \geq N \text{ et } q \geq N) \implies d(u_p, u_q) \leq \varepsilon.$$

Cette définition est équivalente à la formulation suivante, souvent plus pratique :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, r) \in \mathbb{N}^2, \quad p \geq N \implies d(u_{p+r}, u_p) \leq \varepsilon.$$

Remarque. 1. Si deux normes N et N' sur E sont équivalentes, alors les suites de Cauchy de (E, N) sont les mêmes que celles de (E, N') .

2. Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est encore une suite de Cauchy.

Proposition 1.1. *Toute suite de Cauchy dans E est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. D'après la définition (avec $\varepsilon = 1$), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (p, r) \in \mathbb{N}^2, \quad p \geq N \implies d(u_{p+r}, u_p) \leq 1.$$

En prenant $p = N + 1$, on obtient :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad d(u_{N+1+r}, u_{N+1}) \leq 1,$$

c'est-à-dire :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad \|u_{N+1+r} - u_{N+1}\| \leq 1.$$

Par l'inégalité triangulaire :

$$\|u_{N+1+r}\| \leq \|u_{N+1}\| + 1.$$

Posons alors :

$$M = \max \{ \|u_0\|, \|u_1\|, \dots, \|u_N\|, \|u_{N+1}\| + 1 \}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- Si $n \leq N$, alors $\|u_n\| \leq M$.
- Si $n \geq N + 1$, alors il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $n = N + 1 + r$, et donc $\|u_n\| \leq \|u_{N+1}\| + 1 \leq M$.

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \leq M,$$

ce qui prouve que la suite est bornée. □

Proposition 1.2. *Toute suite convergente dans E est de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un élément $\ell \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies d(u_n, \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq N$ et $q \geq N$, on a :

$$d(u_p, \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad d(u_q, \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par l'inégalité triangulaire :

$$d(u_p, u_q) \leq d(u_p, \ell) + d(\ell, u_q) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (p \geq N \text{ et } q \geq N) \implies d(u_p, u_q) \leq \varepsilon.$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E . □

1.1.2 Parties complètes

Définition 1.2. On dit qu'une partie A de E est **complète** si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de A converge dans A .

On dit que E est **complet** si et seulement si E est une partie complète de E .

On appelle **espace de Banach** tout $\mathbb{K}$ — espace vectoriel normé complet.

Remarque. Si $N_1 \sim N_2$ (c'est-à-dire si les normes N_1 et N_2 sont équivalentes) et si (E, N_1) est complet, alors (E, N_2) est également complet.

1.1.3 Exemples d'espaces de Banach

Exemple. Considérons l'espace numérique réel $\mathbb{R}^n$, resp. l'espace numérique complexe $\mathbb{C}^n$. C'est un espace vectoriel réel, resp. un espace vectoriel complexe. Considérons sur cet espace l'une des trois normes usuelles suivantes :

$$\rho_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|, \tag{1.1}$$

$$\rho_2(x) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \tag{1.2}$$

$$\rho_3(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad (\text{norme euclidienne}), \tag{1.3}$$

où l'on a noté $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées du vecteur x .

La topologie définie sur $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) par l'une quelconque de ces normes est la topologie-produit :

$$\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \quad (n \text{ fois}), \quad \text{resp.} \quad \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} \quad (n \text{ fois}).$$

Pour qu'une suite de points ait pour limite $a = (a_1, \dots, a_n)$, il faut et il suffit que, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, la i -ième coordonnée des points de la suite ait pour limite a_i .

Comme $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est complet, $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) est aussi complet. C'est donc un espace de Banach pour l'une quelconque des normes ρ_1, ρ_2, ρ_3 .

1.1.4 Applications linéaires continues

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés, et soient d_E (resp. d_F) les distances associées à $\|\cdot\|_E$ (resp. $\|\cdot\|_F$).

Rappelons quelques définitions, notations et résultats d'algèbre.

Définition 1.3. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **linéaire** (ou $\mathbb{K}$ -linéaire) si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ (ou $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$) l'ensemble des applications linéaires de E dans F , et $\mathcal{L}(E)$ (ou $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$) l'ensemble des endomorphismes de E , c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires de E dans E .

Remarque. – $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ (où G est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel), alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.
- $\mathcal{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre (la troisième loi étant la composition).

Théorème 1.1 (Caractérisation de la continuité pour une application linéaire). *Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est continue (sur E).
- (ii) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

Démonstration. **1) Sens direct :** Supposons f continue. En particulier, f est continue en 0 ; il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall u \in E, \quad (\|u\|_E \leq \eta \implies \|f(u)\|_F \leq 1).$$

Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Comme :

$$\left\| \frac{\eta}{\|x\|_E} x \right\|_E = \eta,$$

on a :

$$\left\| f \left(\frac{\eta}{\|x\|_E} x \right) \right\|_F \leq 1.$$

Par linéarité de f :

$$\frac{\eta}{\|x\|_E} \|f(x)\|_F \leq 1,$$

d'où :

$$\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\eta} \|x\|_E.$$

Ceci montre :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\eta} \|x\|_E.$$

2) Sens réciproque : Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E.$$

Alors, pour tous $x_1, x_2 \in E$, on a :

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_F = \|f(x_1 - x_2)\|_F \leq M\|x_1 - x_2\|_E,$$

où l'égalité provient de la linéarité de f .

Ainsi, f est M -lipschitzienne, donc continue sur E . □

Remarque. Le théorème précédent permet de déduire aisément que, pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

1. f est continue en 0 ;
2. f est continue (sur E) ;
3. f est uniformément continue ;
4. f est lipschitzienne ;
5. $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$;
6. f est bornée sur la boule unité fermée de E , c'est-à-dire :

$$\exists M_1 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \quad (\|x\|_E \leq 1 \implies \|f(x)\|_F \leq M_1);$$

7. f est bornée sur la sphère unité, c'est-à-dire :

$$\exists M_2 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \quad (\|x\|_E = 1 \implies \|f(x)\|_F \leq M_2).$$

On note :

- $\mathcal{LC}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F ;
- $\mathcal{LC}(E)$ l'ensemble des endomorphismes continus de E ;
- $E' = \mathcal{LC}(E, \mathbb{K})$, appelé **dual topologique** de E .

Remarque. Nous verrons plus loin (cf. 1.3.2 Prop. 1 p. 65) que, si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.

1.1.5 Fonctions différentiables

Définition 1.4. Soient U un ouvert de E , $a \in U$, et $f : U \longrightarrow F$. On dit que f est **différentiable en a** si et seulement s'il existe $L_a \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, en notant $U_0 = \{h \in E \mid a + h \in U\}$:

$$\forall h \in U_0, \quad f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

On dit que f est **différentiable sur U** si et seulement si f est différentiable en tout point a de U .

Rappelons que $\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Remarque. La définition précédente se généralise aisément au cas où E ou F n'est pas de dimension finie, en remplaçant $\mathcal{L}(E, F)$ par $\mathcal{L}_c(E, F)$, ensemble des applications linéaires continues de E dans F (cf. Tome 3, 1.2.6 p. 48 et Tome 4, ex. 8.1.10 et 8.1.11 p. 177).

Proposition 1.3 (Proposition-Définition 1). *Avec les notations de la Définition précédente, si f est différentiable en a , alors L_a est unique. L'application L_a est appelée la **différentielle** de f en a (ou : application linéaire tangente en a à f) et notée $d_a f$.*

Démonstration. Supposons que deux applications linéaires L_a, M_a conviennent. On a alors :

$$\begin{cases} f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|), \\ f(a + h) = f(a) + M_a(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|). \end{cases}$$

En soustrayant, on obtient :

$$(L_a - M_a)(h) = o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

Soit $v \in E \setminus \{0\}$. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a, par linéarité :

$$t(L_a - M_a)(v) = (L_a - M_a)(tv) = o(|t|).$$

D'où :

$$(L_a - M_a)(v) = \frac{o(|t|)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi :

$$(L_a - M_a)(v) = 0.$$

Comme ceci est vrai pour tout $v \in E \setminus \{0\}$ (et trivialement pour $v = 0$), on a $L_a - M_a = 0$, donc $L_a = M_a$.

L'unicité étant établie, si f est différentiable en a , on a :

$$f(a + h) = f(a) + (d_a f)(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

□

1.1.6 Différentielle d'une application de classe C^1

Définition 1.5. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$, et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur U . On appelle **différentielle de f en a** (ou : application linéaire tangente à f en a) l'application linéaire notée $d_a f$ définie par :

$$\begin{aligned} d_a f : \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ h = (h_1, \dots, h_p) &\longmapsto \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \end{aligned}$$

Cette définition généralise celle du Tome 2, 13.3.2 p. 171.

Proposition 1.4. *Toute application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^p$ et :*

$$\forall a \in \mathbb{R}^p, \quad d_a \varphi = \varphi.$$

Démonstration. Notons $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, et soit $a \in \mathbb{R}^p$. Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{t}(\varphi(a + te_j) - \varphi(a)) = \varphi(e_j),$$

par linéarité de φ . Donc φ admet des dérivées partielles premières en a et :

$$D_j \varphi(a) = \varphi(e_j).$$

D'où, pour tout $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$:

$$(d_a \varphi)(h) = \sum_{j=1}^p h_j D_j \varphi(a) = \sum_{j=1}^p h_j \varphi(e_j) = \varphi\left(\sum_{j=1}^p h_j e_j\right) = \varphi(h).$$

Ainsi, $d_a \varphi = \varphi$. □

Remarque. Les remarques sur les notations formulées dans le Tome 2, p. 172 sont ici aussi valables.

Pour $j \in \{1, \dots, p\}$, la j -ième projection

$$\text{pr}_j : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_p) \longmapsto x_j$$

est notée abusivement x_j . D'où :

$$d_a \text{pr}_j = d_a x_j : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (h_1, \dots, h_p) \longmapsto h_j.$$

Comme la différentielle $d_a x_j$ ne dépend pas de a , on la note dx_j .

Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 sur U , on a alors :

$$\forall a \in U, \quad d_a f = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j.$$

1.1.7 Différentielle et dérivées partielles

Théorème 1.2. Soient U un ouvert de E , $a \in U$, et $f : U \longrightarrow F$. Si f est différentiable en a , alors, pour tout $v \in E \setminus \{0\}$, f admet une dérivée en a suivant v .

Démonstration. Puisque f est différentiable en a :

$$f(a+h) = f(a) + (d_a f)(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + tv \in U$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a)) &= \frac{1}{t}((d_a f)(tv) + o(|t|)) \\ &= (d_a f)(v) + o(1) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (d_a f)(v). \end{aligned}$$

Donc f admet une dérivée en a suivant v , et :

$$(D_v f)(a) = (d_a f)(v).$$

□

Corollaire 1.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$, et $f : U \longrightarrow F$. Si f est différentiable en a , alors f admet des dérivées partielles premières en a , et :

$$\forall (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad (d_a f)(h_1, \dots, h_p) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Démonstration. D'après le Théorème 2, f admet des dérivées partielles premières en a et :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = (d_a f)(e_j),$$

où $(e_1, \dots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

On en déduit, par linéarité de $d_a f$:

$$\forall (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad (d_a f)(h_1, \dots, h_p) = \sum_{j=1}^p h_j (d_a f)(e_j) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

□

Remarque. Il se peut qu'une application $f : U \longrightarrow F$ admette des dérivées partielles premières en a sans être différentiable en a .

Par exemple, l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy \neq 0, \\ 1 & \text{si } xy = 0, \end{cases}$$

admet des dérivées partielles premières en $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

(car $f(\cdot, 0) = 1$ et $f(0, \cdot) = 1$), mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$ car f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Voir aussi l'exercice 8.1.9 p. 177.

Théorème 1.3. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$, et $f : U \longrightarrow F$. Si :

$$\begin{cases} f \text{ admet des dérivées partielles premières sur } U, \\ \text{les dérivées partielles premières de } f \text{ sont continues en } a, \end{cases}$$

alors f est différentiable en a .

Démonstration. C'est essentiellement la même démonstration que pour la Proposition 8.1.2 p. 167. $\square$

Remarque. On peut résumer les trois théorèmes précédents, pour $f : U \longrightarrow F$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $a \in U$:

$$\text{différentiable en } a \implies \begin{cases} \text{dérivées directionnelles en } a, \\ \text{dérivées partielles premières en } a, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \text{dpp sur } U, \\ \text{dpp continues en } a \end{cases} \implies \text{différentiable en } a.$$

où dpp est l'abréviation de : dérivée partielle première.

Le lecteur se convaincra aisément à l'aide d'exemples que les réciproques de ces implications sont fausses.

1.1.8 Matrice jacobienne

Définition 1.6. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$, et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur U . On appelle **matrice jacobienne** de f en a , et on note $J_f(a)$, la matrice de $d_a f$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.

Notons $f_1, \dots, f_n$ les fonctions composantes de f :

$$\forall x \in U, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

On a alors :

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Définition 1.7. Avec les hypothèses et notations de la Définition précédente, et si $n = p$, on appelle (**déterminant**) **jacobien** de f en a le déterminant de la matrice jacobienne de f en a .

1.1.9 Différentielle de fonctions composées

Théorème 1.4 (Composition des applications de classe C^1). Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, U (resp. V) un ouvert de $\mathbb{R}^p$ (resp. $\mathbb{R}^q$), $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telles que $f(U) \subset V$.

Si f est de classe C^1 sur U et si g est de classe C^1 sur V , alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur U et :

$$\forall a \in U, \quad \begin{cases} d_a(g \circ f) = (d_{f(a)}g) \circ (d_a f), \\ J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a). \end{cases}$$

On a noté ici abusivement $g \circ f$ l'application :

$$g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto g(f(x)).$$

Démonstration. Soit $a \in U$. Notons :

$$U_0 = \{h \in \mathbb{R}^q \mid a + h \in U\}, \quad V_0 = \{k \in \mathbb{R}^p \mid f(a) + k \in V\}.$$

Puisque f est de classe C^1 sur U , d'après la Proposition 8.1.2 p. 167, il existe $\varepsilon_1 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que :

$$\begin{cases} \forall h \in U_0, & f(a + h) = f(a) + (d_a f)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h), \\ \varepsilon_1(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{cases}$$

De même, puisque g est de classe C^1 sur V , il existe $\varepsilon_2 : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\begin{cases} \forall k \in V_0, & g(f(a) + k) = g(f(a)) + (d_{f(a)} g)(k) + \|k\| \varepsilon_2(k), \\ \varepsilon_2(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0. \end{cases}$$

Pour tout $h \in U_0$, on a :

$$(d_a f)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h) = f(a + h) - f(a) \in V_0.$$

On en déduit, en utilisant la linéarité de $d_{f(a)} g$:

$$\begin{aligned} \forall h \in U_0, \quad g(f(a + h)) &= g\left(f(a) + ((d_a f)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h))\right) \\ &= g(f(a)) + (d_{f(a)} g \circ d_a f)(h) + \alpha(h), \end{aligned}$$

où

$$\alpha(h) = \|h\| (d_{f(a)} g)(\varepsilon_1(h)) + \|h\| \varepsilon_1(h) \| \varepsilon_2((d_a f)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)) \|.$$

Notons $L = d_{f(a)} g \circ d_a f$; L est linéaire.

Puisque $d_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ et $d_{f(a)} g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, il existe $(A, B) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que :

$$\begin{cases} \forall h \in \mathbb{R}^q, & \|(d_a f)(h)\| \leq A \|h\|, \\ \forall k \in \mathbb{R}^p, & \|(d_{f(a)} g)(k)\| \leq B \|k\| \end{cases}$$

(cf. Tome 3, 1.2.6 Th. p. 48).

On a alors :

$$\begin{cases} \|(d_{f(a)} g)(\varepsilon_1(h))\| \leq B \|\varepsilon_1(h)\|, \\ \|(d_a f)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)\| \leq \|h\| (A + \|\varepsilon_1(h)\|). \end{cases}$$

D'autre part, par composition d'applications continues :

$$\varepsilon_2((d_a f)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Ceci montre que α est de la forme $\alpha(h) = \|h\| \varepsilon(h)$ où $\varepsilon : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} (g \circ f)(a + h) = (g \circ f)(a) + L(h) + \|h\| \varepsilon(h), \\ \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{cases}$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, on a alors :

$$\frac{1}{t} ((g \circ f)(a + te_j) - (g \circ f)(a)) = L(e_j) + \frac{|t|}{t} \|e_j\| \varepsilon(te_j) \xrightarrow{t \rightarrow 0} L(e_j).$$

Ceci montre que $g \circ f$ admet des dérivées partielles premières en tout point a de U , et :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad (D_j(g \circ f))(a) = L(e_j).$$

Notons $f_1, \dots, f_p$ les fonctions composantes de f , $g_1, \dots, g_n$ celles de g , et $(g \circ f)_1, \dots, (g \circ f)_n$ celles de $g \circ f$. On a, pour tout $j \in \{1, \dots, q\}$, et en notant de la même façon les bases canoniques de $\mathbb{R}^q$, $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} L(e_j) &= (d_{f(a)} g \circ d_a f)(e_j) \\ &= (d_{f(a)} g) \left(\sum_{k=1}^p D_j f_k(a) e_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^p D_j f_k(a) (d_{f(a)} g)(e_k) \\ &= \sum_{k=1}^p D_j f_k(a) \left(\sum_{i=1}^n D_k g_i(f(a)) e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^p D_k g_i(f(a)) D_j f_k(a) \right) e_i. \end{aligned}$$

Comme, d'autre part :

$$L(e_j) = \sum_{i=1}^n D_j(g \circ f)_i(a) e_i,$$

on déduit :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, q\}, \quad D_j(g \circ f)_i(a) = \sum_{k=1}^p D_k g_i(f(a)) D_j f_k(a).$$

Le résultat précédent montre que les dérivées partielles premières de $g \circ f$ s'expriment comme sommes de produits et composées de f et des dérivées partielles premières de f et g ; il en résulte que les dérivées partielles premières de $g \circ f$ sont continues sur U , et donc $g \circ f$ est de classe C^1 sur U .

En passant aux matrices dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$, on obtient :

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a),$$

et donc :

$$d_a(g \circ f) = (d_{f(a)} g) \circ (d_a f).$$

□

Exemple. Soient $f : (x, y, z) \mapsto (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) \in \mathbb{R}^2$ et $g : (u, v) \mapsto g(u, v) \in \mathbb{R}$, de classe C^1 sur des ouverts convenables. Alors $g \circ f$ est de classe C^1 et, en notant $M = (x, y, z)$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(M), \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(M), \frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(M) \right) = J_{g \circ f}(M) \\ & = J_g(f_1(M), f_2(M)) \cdot J_f(M) \\ & = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(f_1(M), f_2(M)) & \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(M), f_2(M)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(M) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(M) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(M) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(M) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(M) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(M) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où, par exemple :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(M) = \frac{\partial g}{\partial u}(f_1(M), f_2(M)) \frac{\partial f_1}{\partial x}(M) + \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(M), f_2(M)) \frac{\partial f_2}{\partial x}(M).$$

Pour alléger les écritures, souvent on n'écrit pas le point « en lequel on se place », et on confond u (place ou variable), f_1 (fonction), $f_1(x, y, z)$ (réel), pour obtenir :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$