

Calcul différentiel avancé

Filière Licence Mathématiques et Modélisation
Numérique
Deuxième Année

Dr Mohamed A. SANA
UNIVERSITÉ VIRTUELLE DE COTE D'IVOIRE

2026-2027

Table des matières

2	Courbes paramétrées	1
2.2	Intégrales curvilignes	1
2.2.1	Arcs orientés, courbes orientées	1
2.2.2	Définition de l'intégrale curviligne	3
2.2.3	Propriétés algébriques de l'intégrale curviligne	4
2.2.4	Intégrale curviligne et forme différentielle exacte	6
2.2.5	Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe orientée	8
2.2.6	Longueur de la courbe	9

Chapitre 2

Courbes paramétrées

L'étude se situe dans le plan affine euclidien, noté $\mathcal{E}_2$, éventuellement muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$; le produit scalaire est noté $(\cdot, \cdot)$ ou $*$, la norme associée est notée $\| \cdot \|$, et la distance de deux points A, B est notée $d(A, B)$ ou $\|\vec{AB}\|$ ou AB . Classiquement, on identifie $\mathcal{E}_2$ à $\mathbb{R}^2$.

2.3 Intégrales curvilignes

L'objectif de cette section est d'acquérir des techniques efficaces pour résoudre les problèmes issus de la Physique. L'étude se situe

- soit dans le (un) plan euclidien orienté $\mathcal{E}_2$ muni éventuellement d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les axes étant nommés $(x'x), (y'y)$;
- soit dans l'(un) espace euclidien orienté $\mathcal{E}_3$ de dimension 3 muni éventuellement d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les axes étant nommés $(x'x), (y'y), (z'z)$.

On confond souvent $\mathcal{E}_2$ et $\mathbb{R}^2$, en munissant $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel et de la base canonique, ainsi que $\mathcal{E}_3$ et $\mathbb{R}^3$.

2.3.1 Arcs orientés, courbes orientées

Nous traitons ici le cas de $\mathbb{R}^3$; l'étude relative à $\mathbb{R}^2$ est analogue et peut être obtenue en remplaçant la 3^e coordonnée par 0.

Définition 2.1. On appelle **arc orienté de classe C^1 par morceaux** toute application

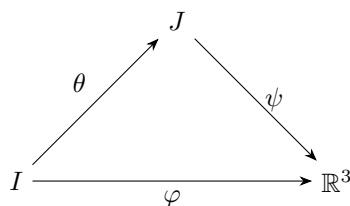
$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$$

où I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $x, y, z : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des applications de classe C^1 par morceaux.

Nous abrégerons ici « arc orienté de classe C^1 par morceaux » en : **arc orienté**.

Définition 2.2. On dit qu'un arc orienté $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est **équivalent** à un arc orienté $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ si et seulement s'il existe une application $\theta : I \longrightarrow J$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \psi \circ \theta, \\ \theta \text{ est de classe } C^1 \text{ par morceaux sur } I, \\ \theta \text{ est croissante,} \\ \theta \text{ est bijective,} \\ \theta^{-1} \text{ est de classe } C^1 \text{ par morceaux sur } J. \end{array} \right.$$



Remarque. Sous les hypothèses précédentes, et en notant $[a, b] = I$, $[\alpha, \beta] = J$, on a :

$$\begin{cases} \theta(a) = \alpha, & \theta(b) = \beta, \\ \forall t \in [a, b] \setminus E, & \theta'(t) > 0, \end{cases}$$

où E désigne l'ensemble des points de $[a, b]$ en lesquels θ' n'est pas définie.

Proposition 2.1. *La relation « est équivalent à » est une relation d'équivalence dans l'ensemble des arcs orientés de $\mathbb{R}^3$.*

Démonstration. **Réflexivité :** prendre $\theta = \text{Id}_I$.

Symétrie : si θ convient pour (φ, ψ) , alors θ^{-1} convient pour (ψ, φ) .

Transitivité : si θ_1 convient pour (φ, ψ) et θ_2 convient pour (ψ, χ) (où $\chi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$), alors $\theta_2 \circ \theta_1$ convient pour (φ, χ) car :

$$\begin{cases} \varphi = \psi \circ \theta_1 = (\chi \circ \theta_2) \circ \theta_1 = \chi \circ (\theta_2 \circ \theta_1), \\ \theta_2 \circ \theta_1 \text{ est de classe } C^1 \text{ par morceaux sur } I, \\ \theta_2 \circ \theta_1 \text{ est croissante,} \\ \theta_2 \circ \theta_1 \text{ est bijective,} \\ (\theta_2 \circ \theta_1)^{-1} (= \theta_1^{-1} \circ \theta_2^{-1}) \text{ est de classe } C^1 \text{ par morceaux sur } K. \end{cases}$$

□

Définition 2.3. On appelle **courbe orientée de classe C^1 par morceaux** toute classe d'équivalence d'un arc orienté de classe C^1 par morceaux.

- Nous abrègerons ici « courbe orientée de classe C^1 par morceaux » en : **courbe orientée**.
- Soit (C) la classe d'équivalence d'un arc orienté $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)).$$

On dit que (C) admet pour représentation paramétrique :

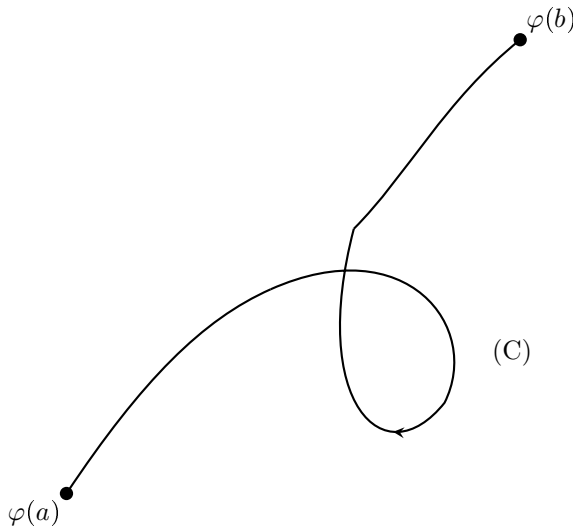
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t); \end{cases} \quad t \in I,$$

on dit que φ est un **paramétrage** de (C) .

- On confond souvent la courbe orientée (C) avec l'ensemble des points M de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ lorsque t décrit I (cet ensemble est indépendant du paramétrage choisi). On écrit même :

$$(C) = \left\{ (x, y, z) \in \mathcal{E}_3 \left| \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I, \right. \right\}.$$

- $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ (qui ne dépendent pas du choix de φ) s'appellent respectivement l'**origine** et l'**extrémité** de φ , ou de (C) ; on dit aussi que $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont les **extrémités** de φ , ou de (C) .



- Comme, pour tous intervalles fermés bornés $[a; b]$ et $[\alpha; \beta]$ (tels que $a < b$ et $\alpha < \beta$) il existe un C^1 -difféomorphisme (cf. 5.3.1, Tome 1, p. 149) de l'un dans l'autre (par exemple : $t \mapsto \frac{\beta-\alpha}{b-a}(t-a) + \alpha$), on peut en pratique choisir I dans lequel varie le paramètre t permettant de décrire la courbe (C) .

2.3.2 Définition de l'intégrale curviligne

Soient : U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ $\omega : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ une forme $(x, y, z) \mapsto P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ différentielle, où $P, Q, R : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des applications de classe C^1 sur U

$$\begin{aligned} J &= [\alpha, \beta] (\alpha \leq \beta) \\ \psi : J &\longrightarrow \mathbb{R}^3 && \text{un arc orienté tel que } \psi(J) \subset U. \\ t &\longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Considérons l'intégrale

$$E_\psi = \int_\alpha^\beta (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt,$$

où l'expression sous le signe d'intégrale est obtenue en remplaçant, dans ω, x, y, z en fonction de t . Soient $I = [a; b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ ($a \leq b$) $\theta : I \longrightarrow J$ une application de classe C^1 par morceaux sur I , bijective, croissante, telle que θ^{-1} soit de classe C^1 par morceaux sur J

$$\varphi = \psi \circ \theta, X = x \circ \theta, Y = y \circ \theta, Z = z \circ \theta.$$

Effectuons dans l'intégrale E_ψ le changement de variable $t = \theta(u)$ (on décompose $[a; b]$ en intervalles successifs correspondant aux éventuelles discontinuités de x', y', z') :

$$\begin{aligned} E_\psi &= \int_a^b (P(x(\theta(u)), y(\theta(u)), z(\theta(u)))x'(\theta(u)) \\ &\quad + Q(x(\theta(u)), y(\theta(u)), z(\theta(u)))y'(\theta(u)) \\ &\quad + R(x(\theta(u)), y(\theta(u)), z(\theta(u)))z'(\theta(u))\theta'(u) du \\ &= \int_a^b (P(X(u), Y(u), Z(u))X'(u) + Q(X(u), Y(u), Z(u))Y'(u) \\ &\quad + R(X(u), Y(u), Z(u))Z'(u)) du = E_\varphi \end{aligned}$$

c'est-à-dire que E_ψ ne dépend pas de ψ , mais dépend seulement de la classe d'équivalence de ψ .

Résumons l'étude :

Proposition 2.2 (Définition de l'intégrale curviligne). Soient : U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, ω une forme différentielle sur U :

$$\omega(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

où $P, Q, R : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur U , (C) une courbe orientée de $\mathbb{R}^3$, et $\varphi : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une représentation paramétrique de (C) .

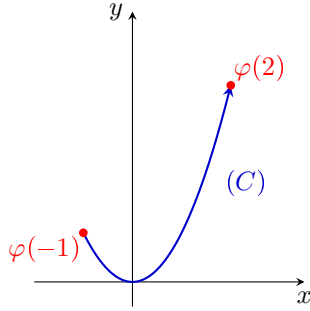
L'intégrale

$$\int_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt$$

ne dépend pas du choix de φ représentant (C) . Elle est appelée l'intégrale curviligne de ω le long de (C) et est notée $\int_{(C)} \omega$.

Exemple : Calcul de l'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega = xy dx + (x + y) dy$ le long de la parabole (C) .

Tracé de la courbe (C)



Détail du calcul :

On paramétrise l'arc par $\varphi(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^2)$ pour $t \in [-1; 2]$. Sachant que $dx = dt$ et $dy = 2t dt$:

$$\begin{aligned}\omega &= x(t)y(t) dx + (x(t) + y(t)) dy \\ &= t \cdot t^2 dt + (t + t^2) \cdot 2t dt \\ &= (3t^3 + 2t^2) dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{(C)} \omega &= \int_{-1}^2 (3t^3 + 2t^2) dt \\ &= \left[\frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= \left(12 + \frac{16}{3} \right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{69}{4}\end{aligned}$$

Résultat final : $\boxed{\int_{(C)} \omega = \frac{69}{4}}$

Exemple : Calculer $\int_{(C)} \omega$ où $\omega = -xy^2 dx + x^2 dy$ et (C) est la demi-cardioïde d'équation polaire $\rho = a(1 + \cos \theta)$ pour $\theta \in [0, \pi]$. (C) admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta = a(1 + \cos \theta) \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta = a(1 + \cos \theta) \sin \theta \end{cases}.$$

d'où

$$\int_{(C)} \omega$$

$$\begin{aligned}&= \int_0^\pi a^2(1 + \cos \theta)^2 \cos \theta \sin \theta (-a(1 + \cos \theta) \sin \theta (-a(\sin \theta + \sin 2\theta))) \\ &\quad + a(1 + \cos \theta) \cos \theta (a(\cos \theta + \cos 2\theta)) d\theta \\ &= a^4 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta \sin \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin \theta \sin 2\theta + \cos \theta \cos 2\theta) d\theta \\ &= a^4 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^4 \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &=_{r=\cos \theta} a^4 \int_{-1}^1 \left(1 + t^4 \right) dt \quad =_{r=1+t^4} a^4 \int_0^2 u^4(u-1) du = a^4 \left[\frac{u^6}{6} - \frac{u^5}{5} \right]_0^2 = \frac{64}{15} a^4.\end{aligned}$$

2.3.3 Propriétés algébriques de l'intégrale curviligne

1. Linéarité

Proposition 2.3 (Linéarité de l'intégrale curviligne). Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, ω_1, ω_2 des formes différentielles définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, (C) une courbe orientée incluse dans U ; on a :

$$\int_{(C)} (\lambda \omega_1 + \omega_2) = \lambda \int_{(C)} \omega_1 + \int_{(C)} \omega_2.$$

Démonstration. Immédiate en revenant à la définition (cf. 13.1.2 p. 224). □

2. Relation de Chasles

Soient (C_1) et (C_2) deux courbes orientées telles que l'extrémité de (C_1) soit l'origine de (C_2) . Soit $\varphi_1 : [-1; 0] \rightarrow \mathbb{R}^3$ (resp. $\varphi_2 : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$) une représentation paramétrique de (C_1) (resp. (C_2)).

L'application $\varphi : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{si } t \in [-1; 0] \\ \varphi_2(t) & \text{si } t \in]0; 1] \end{cases}$$

est de classe C^1 par morceaux et définit une courbe orientée (C) .

Remarquons que (C) ne dépend pas du choix des représentations paramétriques φ_1 et φ_2 de (C_1) et (C_2) car, si $\psi_1 : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\psi_2 : J_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont des représentations paramétriques de (C_1) et (C_2) , il existe $\theta_1 : [-1; 0] \rightarrow J_1$ et $\theta_2 : [0; 1] \rightarrow J_2$ telles que :

$$\begin{cases} \theta_1 \text{ et } \theta_2 \text{ sont de classe } C^1 \text{ par morceaux} \\ \theta_1 \text{ et } \theta_2 \text{ sont croissantes} \\ \theta_1 \text{ et } \theta_2 \text{ sont bijectives} \\ \theta_1^{-1} \text{ et } \theta_2^{-1} \text{ sont de classe } C^1 \text{ par morceaux} \end{cases}$$

On voit alors aisément que $\theta : [-1; 1] \rightarrow J_1 \cup J_2$ définie par

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_1(t) & \text{si } t \in [-1; 0] \\ \theta_2(t) & \text{si } t \in]0; 1] \end{cases}$$

est de classe C^1 par morceaux, croissante, bijective et telle que θ^{-1} soit de classe C^1 par morceaux (remarquer que l'extrémité de J_1 est l'origine de J_2).

La courbe orientée (C) ne dépend donc que de (C_1) et (C_2) . Elle est formée de la « succession » de (C_1) et de (C_2) ; on la note souvent (abusivement) $(C_1) \cup (C_2)$, ou $(C_1) + (C_2)$.

Proposition 2.4 (Relation de Chasles pour les intégrales curvilignes). *Soient ω une forme différentielle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, et $(C_1), (C_2)$ deux courbes orientées incluses dans U telles que l'extrémité de (C_1) soit l'origine de (C_2) . On a :*

$$\int_{(C_1) \cup (C_2)} \omega = \int_{(C_1)} \omega + \int_{(C_2)} \omega.$$

Démonstration. Avec les notations précédentes et $(x_1(t), y_1(t), z_1(t)) = \varphi_1(t)$, $(x_2(t), y_2(t), z_2(t)) = \varphi_2(t)$, $(x(t), y(t), z(t)) = \varphi(t)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{(C_1) \cup (C_2)} \omega &= \int_{-1}^1 (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt \\ &= \int_{-1}^0 (P(x_1(t), y_1(t), z_1(t))x_1'(t) + Q(x_1(t), y_1(t), z_1(t))y_1'(t) \\ &\quad + R(x_1(t), y_1(t), z_1(t))z_1'(t)) dt \\ &\quad + \int_0^1 (P(x_2(t), y_2(t), z_2(t))x_2'(t) + Q(x_2(t), y_2(t), z_2(t))y_2'(t) \\ &\quad + R(x_2(t), y_2(t), z_2(t))z_2'(t)) dt \\ &= \int_{(C_1)} \omega + \int_{(C_2)} \omega. \end{aligned}$$

□

Soit (C) une courbe orientée, de représentation paramétrique $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3$; considérons l'application

$$\begin{cases} \varphi_1 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto \varphi(a + b - t). \end{cases}$$

Si $\psi : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est équivalente à φ , alors on voit aisément que

$$\begin{cases} \psi_1 : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u \mapsto \psi(\alpha + \beta - u). \end{cases}$$

est équivalente à φ_1 . Ceci montre que la classe d'équivalence de φ_1 ne dépend que de (C) et non de la représentation paramétrique choisie pour (C) . On note $-(C)$ la courbe orientée représentée paramétriquement par φ_1 . $-(C)$ est ainsi obtenue en considérant (C) « en sens inverse ». Le changement de variable $u = a + b - t$ dans l'intégrale définissant $\int_{(C)} \omega$ permet de déduire le résultat suivant :

Proposition 2.5. Soient ω une forme différentielle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ et (C) une courbe orientée incluse dans U ; on a :

$$\int_{(-C)} \omega = - \int_{(C)} \omega.$$

Définition 2.4 (Lacet). On appelle *lacet* toute courbe orientée (C) dont l'origine et l'extrémité sont égales.

Proposition 2.6. Si ω est une forme différentielle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ et (C) un lacet inclus dans U , alors $\int_{(C)} \omega$ ne dépend pas de l'origine du lacet.

Démonstration. Notons A l'origine de (C) ; soit A' un point quelconque de (C) , et notons (C') le lacet coïncidant avec (C) et issu de A' . Notons (C_1) la courbe orientée de A vers A' sur (C) , et (C_2) celle de A' vers A , de sorte que

$$(C) = (C_1) \cup (C_2) \quad \text{et} \quad (C') = (C_2) \cup (C_1).$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_{(C)} \omega &= \int_{(C_1)} \omega + \int_{(C_2)} \omega \\ &= \int_{(C_2)} \omega + \int_{(C_1)} \omega \\ &= \int_{(C')} \omega. \end{aligned}$$

□

2.3.4 Intégrale curviligne et forme différentielle exacte

Théorème 2.1. Soient :

- U un ouvert de $\mathbb{R}^3$,
- ω une forme différentielle sur U ,
- $(A, B) \in U^2$,
- (C) une courbe orientée incluse dans U , d'origine A et d'extrémité B .

Si ω est exacte sur U , alors, en notant f une primitive de ω sur U , on a :

$$\int_{(C)} \omega = f(B) - f(A).$$

Démonstration. Notons $\varphi : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$ une représentation paramétrique de (C) et P, Q, R les coefficients de ω . Supposons x, y, z de classe C^1 .

On a, pour tout t de $[a; b]$:

$$\begin{aligned} &P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t) \\ &= \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t), z(t))) \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{(C)} \omega = [f(x(t), y(t), z(t))]_a^b = f(B) - f(A).$$

On adapte aisément l'étude précédente au cas où x, y, z sont de classe C^1 par morceaux. □

Ainsi, si ω est exacte sur U et si $(C) \subset U$, alors $\int_{(C)} \omega$ ne dépend que des extrémités de (C) et non de (C) «toute entière».

En particulier, on peut alors calculer $\int_{(C)} \omega$ en remplaçant (C) par une autre courbe orientée, de mêmes extrémités que (C) .

Exemple. 1. Calculer $\int_{(C)} \omega$ où $\omega = (x+y)dx + (x-y)dy$ et (C) est la demi-cardioïde d'équation polaire $\rho = (1 + \cos \theta)$, θ allant de 0 à π .

En notant $P : (x, y) \mapsto x + y$ et $Q : (x, y) \mapsto x - y$, on a $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, donc ω est fermée sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Comme de plus $\mathbb{R}^2$ est étoilé, le théorème de Poincaré nous dit que ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$; mais nous allons tout simplement calculer une primitive f de ω sur $\mathbb{R}^2$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y \quad (1)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - y \quad (2)$$

La relation (1) équivaut à l'existence de $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + g(y).$$

En reportant dans (2) : $\forall y \in \mathbb{R}, g'(y) = -y$. Ainsi, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(x, y) \mapsto \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}$$

est une primitive de ω sur $\mathbb{R}^2$ (ce qu'on aurait pu remarquer dès la donnée de ω).

D'après le théorème précédent, puisque (C) a pour origine $A(2, 0)$ et pour extrémité $B(0, 0)$, on a :

$$\int_{(C)} \omega = f(B) - f(A) = -2.$$

2. Calculer $\int_{(C)} \omega$ où

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{(y-z)(yz-x^2)}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)} dx + \frac{(z-x)(zx-y^2)}{(y^2+z^2)(y^2+x^2)} dy \\ & + \frac{(x-y)(xy-z^2)}{(z^2+x^2)(z^2+y^2)} dz \end{aligned}$$

(somme de trois termes obtenus par permutation circulaire), et $(C) : x = \cos^2 t, y = 2 \cos^4 t, z = 1 + \frac{t}{\pi}, t$ allant de $-\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}$. Un calcul élémentaire fournit : $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$, et deux relations analogues par permutation circulaire. Donc ω est fermé sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^3$ (qui contient (C)) ; comme $(\mathbb{R}_+^*)^3$ est étoilé, le théorème de Poincaré permet de déduire que ω est exacte sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$. Dans cet exemple, on pourrait calculer une primitive de ω sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$, mais assez péniblement. Nous allons plutôt remplacer (C) par le segment de droite AB , représenté paramétriquement par : $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = u$, u allant de $\frac{3}{4}$ à $\frac{5}{4}$. On obtient : $\int_{(C)} \omega = \int_{AB} \omega = \int_{3/4}^{5/4} 0 \, dz = 0$.

Corollaire 2.1. Soient ω une forme différentielle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ et (C) un lacet inclus dans U . Si ω est exacte sur U , alors $\int_{(C)} \omega = 0$.

Démonstration. En notant A l'origine de (C) (qui est confondue avec l'extrémité) et f une primitive de ω sur U , on a :

$$\int_{(C)} \omega = f(A) - f(A) = 0.$$

□

Le corollaire précédent peut être utilisé, par contraposition, pour montrer dans certains exemples qu'une forme différentielle (bien que fermée) peut ne pas être exacte.

Exemple. Montrer que la forme différentielle ω , définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

est fermée mais n'est pas exacte.

En notant P, Q les coefficients de ω , on a :

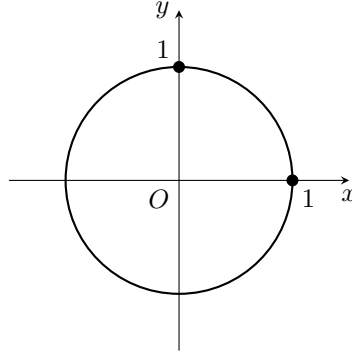
$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y),$$

et donc ω est fermée sur U .

Soit (C) le cercle de centre O , de rayon 1, parcouru une fois dans le sens direct (c'est un lacet) ; une représentation paramétrique de (C) est :

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}, \quad \theta \in [0; 2\pi].$$

Puisque :



$$\begin{aligned} \int_{(C)} \omega &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin \theta}{1} (-\sin \theta) + \frac{\cos \theta}{1} (\cos \theta) \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1 d\theta \\ &= 2\pi \neq 0, \end{aligned}$$

ω n'est pas exacte sur U .

2.3.5 Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe orientée

Définition 2.5. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, (C) une courbe orientée incluse dans U et

$$\begin{aligned} \vec{F} : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \end{aligned}$$

un champ de vecteurs de classe C^1 .

On appelle *circulation* du champ de vecteurs $\vec{F}$ le long de (C) l'intégrale $\int_{(C)} \omega$ où ω est la forme différentielle définie sur U par :

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad \omega(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Remarque. Toute intégrale curviligne $\int_{(C)} \omega$ peut être considérée comme la circulation du champ de vecteurs $(x, y, z) \longmapsto (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ (où P, Q, R sont les coefficients de ω) le long de (C) .

En notant (abusivement) $d\vec{M} = (dx, dy, dz)$ et en utilisant le produit scalaire usuel $\cdot$ sur $\mathbb{R}^3$, la circulation de $\vec{F}$ le long de (C) est : $\int_{(C)} \vec{F}(M) \cdot d\vec{M}$.

On a vu (12.8.3 p. 219) que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire si et seulement si ω est exacte. On déduit donc de 13.1.4 Théorème p. 229 le résultat suivant :

Proposition 2.7. Soient $\vec{F}$ un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ et (C) une courbe orientée incluse dans U , d'origine A et d'extrémité B .

Si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire f , alors la circulation de $\vec{F}$ le long de (C) vaut $f(B) - f(A)$.

2.3.6 Longueur de la courbe

Définition 2.6 (Abscisse curviligne). On appelle *abscisse curviligne* sur Γ toute application $s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I telle que :

$$\forall t \in I, \quad s'(t) = \|f'(t)\|.$$

Remarque. 1. Puisque l'application $I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I , une application $s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une abscisse curviligne sur Γ si et seulement s'il existe $t_0 \in I$ tel que :

$$\forall t \in I, \quad s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du.$$

Ainsi, Γ admet une infinité d'abscisses curvilignes, qui se déduisent de l'une d'entre elles par une constante additive.

Le calcul de s s'appelle la *rectification* de Γ .

Lorsqu'on fait choix d'un élément t_0 de I pour définir une abscisse curviligne $s : t \longmapsto \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du$ sur Γ , on dit que $M(t_0)$ (ou, plus correctement, t_0) est l'origine des abscisses curvilignes sur Γ .

2. On admettra que l'étude peut être généralisée au cas où f est de classe C^1 par morceaux sur I .

3. Effet d'un changement de paramétrage admissible

Soient J un intervalle, $\varphi : J \longrightarrow I$ un changement de paramétrage de f , c'est-à-dire (cf. 3.1.1 4) Déf. 2 p. 174) une application telle que :

$$\begin{cases} \varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } J \\ \varphi \text{ est bijective} \\ \varphi^{-1} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I. \end{cases}$$

On sait qu'alors : $\varphi' > 0$ ou $\varphi' < 0$. Soit $s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une abscisse curviligne sur Γ ; notons $\sigma = s \circ \varphi$, qui est une application de classe C^1 sur J . On a, pour tout u de J : $\sigma'(u) = s'(\varphi(u))\varphi'(u) = \|f'(\varphi(u))\|\varphi'(u)$. Si $\varphi' > 0$, on déduit : $\forall u \in J, \quad \sigma'(u) = \|\varphi'(u)f'(\varphi(u))\| = \|(f \circ \varphi)'(u)\|$, et donc σ est une abscisse curviligne sur Γ . De même, si $\varphi' < 0$, alors $-\sigma$ est une abscisse curviligne sur Γ . Ainsi, la notion d'abscisse curviligne ne dépend pas du choix du paramétrage (direct), mais dépend seulement de la courbe (orientée) Γ . C'est pourquoi on a défini la notion d'abscisse curviligne « sur Γ » à la place de « sur f »

4. Avec les notations de la Définition 1, on a :

$$\forall t \in I, \quad s'^2(t) = \|f'(t)\|^2 = x'^2(t) + y'^2(t),$$

ce qu'on écrit quelquefois abusivement :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2.$$

Définition 2.7. Soient s une abscisse curviligne sur Γ , $a, b \in I$, $A = f(a)$, $B = f(b)$. On appelle :

- *longueur (algébrique) de l'arc $\widehat{AB}$* sur Γ , et on note ici $l(\widehat{AB})$, le réel $s(b) - s(a)$, c'est-à-dire :

$$l(\widehat{AB}) = \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

- *longueur de l'arc $\widehat{AB}$* de Γ , la valeur absolue de la longueur (algébrique) de $\widehat{AB}$ sur Γ .

Proposition 2.8 (Additivité de la longueur d'arc). Soient Γ_1, Γ_2 deux courbes de classe C^1 telles que l'extrémité de Γ_1 soit l'origine de Γ_2 . Alors la longueur de la courbe Γ obtenue par la succession de Γ_1 et Γ_2 est la somme des longueurs de Γ_1 et Γ_2 .

Démonstration. La courbe Γ admet une représentation paramétrique f de classe C^1 par morceaux sur un intervalle $I = I_1 \cup I_2$ (tel que l'extrémité de I_1 soit l'origine de I_2), I_1 et I_2 étant des intervalles tels que $f|_{I_1}$ et $f|_{I_2}$ soient des représentations paramétriques de Γ_1 et Γ_2 . On a :

$$\begin{aligned} l(\Gamma) &= \int_{I_1 \cup I_2} \|f'(t)\| dt \\ &= \int_{I_1} \|(f|_{I_1})'(t)\| dt + \int_{I_2} \|(f|_{I_2})'(t)\| dt \\ &= l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2). \end{aligned}$$

□

Exemple. 1. Longueur de l'astroïde Γ définie par $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$, $a > 0$ fixé.

Par raison de symétries, $l(\Gamma) = 8l(\Gamma_1)$, où Γ_1 est l'arc obtenu en faisant varier t dans $[0; \frac{\pi}{4}]$.

On a, avec des notations habituelles :

$$\begin{cases} x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t \\ y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t \end{cases}$$

$$s'(t) = (x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{1}{2}} = (9a^2 \cos^2 t \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} = 3a \cos t \sin t$$

d'où :

$$l(\Gamma_1) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3a \cos t \sin t dt = \frac{3a}{4},$$

et donc :

$$l(\Gamma) = 8 \times \frac{3a}{4} = 6a.$$