

Calcul différentiel avancé

Filière Licence Mathématiques et Modélisation
Numérique
Deuxième Année

Dr Mohamed A. SANA
UNIVERSITÉ VIRTUELLE DE COTE D'IVOIRE

2026-2027

Table des matières

2	Courbes paramétrées	1
2.1	Plan d'étude d'un arc paramétré	1
2.1.1	Étude de x, y	1
2.1.2	Étude de Γ	1
2.1.3	Exemples de tracé de courbes paramétrées	1

Chapitre 2

Courbes paramétrées

L'étude se situe dans le plan affine euclidien, noté $\mathcal{E}_2$, éventuellement muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$; le produit scalaire est noté $(\cdot, \cdot)$ ou $*$, la norme associée est notée $\|\cdot\|$, et la distance de deux points A, B est notée $d(A, B)$ ou $\|\vec{AB}\|$ ou AB . Classiquement, on identifie $\mathcal{E}_2$ à $\mathbb{R}^2$.

2.2 Plan d'étude d'un arc paramétré

Soit Γ une courbe de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

2.2.1 Étude de x, y

1. Détermination des ensembles de définition de x et y qui, en pratique, sont des intervalles, ou des réunions d'intervalles.
2. Recherche d'éventuelles symétries de Γ , par la considération de changements de paramétrage du genre

$$t \mapsto -t, \quad t \mapsto \frac{1}{t}, \quad \dots,$$

ce qui permet de déterminer un (ou des) intervalle(s) d'étude pour x, y .

3. Étude aux bornes des intervalles.
4. Étude de la dérivation de x, y , détermination des points d'annulation de x', y' et des signes de x', y' .
5. Tableau de variations à cinq lignes t, x', x, y, y' consignant les résultats précédents.

2.2.2 Étude de Γ

- 1) Détermination des branches infinies et de leur nature.
- 2) Détermination des points non réguliers, de leur nature, et de l'allure de la courbe au voisinage de ces points.
- 3) Détermination des points multiples et de leurs tangentes.
- 4) Étude des points remarquables (points d'arrêt, ...).
- 5) Étude des points d'inflexions, si le contexte le permet.
- 6) Tracé de Γ .

2.2.3 Exemples de tracé de courbes paramétrées

Exemple (Astroïde). Soit la courbe Γ définie par

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (a > 0).$$

- Les applications x, y sont 2π -périodiques; on obtient donc toute la courbe en faisant varier t dans un intervalle de longueur 2π .

- x est paire et y est impaire ; on fera donc varier t dans $[0; \pi]$, puis on effectuera la symétrie par rapport à l'axe (Ox) .
- Comme $\forall t \in [0; \pi]$,

$$\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$$

on fera varier t dans $[0; \frac{\pi}{2}]$, puis on effectuera la symétrie par rapport à l'axe (Oy) .

- Enfin, puisque $\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{cases} x(\frac{\pi}{2} - t) = y(t) \\ y(\frac{\pi}{2} - t) = x(t) \end{cases}$$

on fera varier t dans $[0; \frac{\pi}{4}]$, puis on effectuera la symétrie par rapport à la première bissectrice.

- x et y sont dérivables et : $\forall t \in [0; \frac{\pi}{4}]$,

$$\begin{cases} x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t \\ y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t. \end{cases}$$

On en déduit le tableau des variations de x et y .

L'astroïde $\mathcal{A}$ est la courbe paramétrée par $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$. Les symétries par rapport à Ox ($t \mapsto -t$) et à Oy ($t \mapsto \pi - t$) permettent de réduire l'étude à $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, puis de compléter le tracé.

t	0	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	– 0
$x(t)$	1	→ 0
$y'(t)$	0	+ 0
$y(t)$	0	→ 1

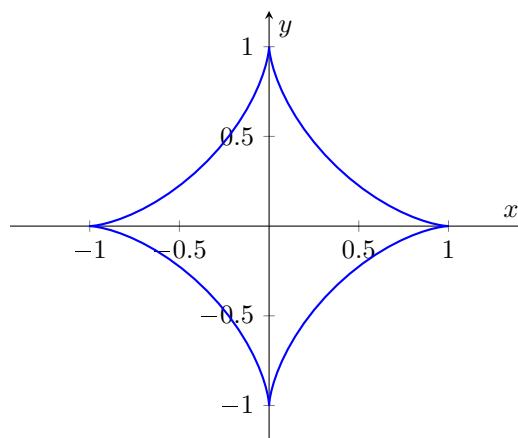
x décroît de 1 à 0, y croît de 0 à 1.

Exemple (Strophoïde droite). Soit la courbe Γ définie par

$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = t \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

- x est paire et y est impaire : on fera donc varier t dans $[0, +\infty[$, puis on effectuera la symétrie par rapport à l'axe (Ox) .
- x et y sont dérivables sur $[0, +\infty[$ et :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \begin{cases} x'(t) = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} \\ y'(t) = \frac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$



t	0	$\sqrt{5}-2$	$+\infty$
x'	0	—	—
x	1	$\longrightarrow$	$\longrightarrow -1$
y	0	$\nearrow$	$\searrow -\infty$
y'	1	+	0 —

On en déduit le tableau des variations de x, y .

On a : $x(\sqrt{5}-2) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0,618$

et $y(\sqrt{5}-2) = (\sqrt{5}-2) \frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0,300$.

- Γ admet la droite d'équation $x = -1$ pour asymptote.
- O est point double de Γ , obtenu pour $t = -1$ et $t = 1$, et les tangentes en O à Γ sont les deux bissectrices, puisque $\frac{y'(1)}{x'(1)} = 1$.

