

Calcul différentiel avancé

Filière Licence Mathématiques et Modélisation
Numérique
Deuxième Année

Dr Mohamed A. SANA
UNIVERSITÉ VIRTUELLE DE COTE D'IVOIRE

2026-2027

Table des matières

1	Courbes paramétrées	1
1.1	Étude des courbes paramétrées	1
1.1.1	Interprétation cinématique	1
1.1.2	Dérivation de fonctions	1
1.1.3	Représentations paramétriques	2
1.1.4	Tangente en un point	2
1.1.5	Allure de la courbe au voisinage d'un point	4
1.1.6	Branches infinies	8
1.1.7	Symétries	11
1.1.8	Points multiples	11

Chapitre 2

Courbes paramétrées

L'étude se situe dans le plan affine euclidien, noté $\mathcal{E}_2$, éventuellement muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$; le produit scalaire est noté $(\cdot, \cdot)$ ou $*$, la norme associée est notée $\|\cdot\|$, et la distance de deux points A, B est notée $d(A, B)$ ou $\|\vec{AB}\|$ ou AB . Classiquement, on identifie $\mathcal{E}_2$ à $\mathbb{R}^2$.

2.1 Étude des courbes paramétrées

Définition 2.1 (Arc paramétré de classe C^k). On appelle arc paramétré (de classe C^k) toute application $f : I \longrightarrow \mathcal{E}_2$ de classe C^k .

$$t \longmapsto f(t)$$

2.1.1 Interprétation cinématique

Définition 2.2 (Mouvement ponctuel). Un **mouvement ponctuel** est un arc paramétré dans lequel la variable t est le temps. Dans ce cas, $\vec{f}'(t)$ s'appelle la **vitesse**, et $\vec{f}''(t)$ l'**accélération** du point en mouvement à l'instant t .

Définition 2.3 (Mouvement uniforme). Un mouvement ponctuel $f : I \rightarrow \mathcal{E}_2$ est dit **uniforme** si et seulement si l'application

$$t \mapsto \|\vec{f}'(t)\|$$

est constante sur I .

Définition 2.4 (Mouvement rectiligne). Un mouvement ponctuel $f : I \rightarrow \mathcal{E}_2$ est dit **rectiligne** si et seulement s'il existe une droite affine D de $\mathcal{E}_2$ telle que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) \in D.$$

Définition 2.5 (Mouvement à accélération centrale). Un mouvement ponctuel $f : I \rightarrow \mathcal{E}_2$ est dit à **accélération centrale** si et seulement si $k \geq 2$ et il existe un point A de $\mathcal{E}_2$ tel que, pour tout t de I , la famille $(Af(t), \vec{f}''(t))$ soit liée.

2.1.2 Dérivation de fonctions

Proposition 2.1. Si $f, g : I \rightarrow \mathcal{E}_2$ sont de classe C^1 sur I , alors $\det(f, g) : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur I et :

$$(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g').$$

Démonstration. (Cf. aussi Analyse 2, 2.2.1).

Puisque f, g sont de classe C^1 sur I , f, g admettent en tout point t de I un développement limité à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} f(t+h) = f(t) + hf'(t) + o_{h \rightarrow 0}(h) \\ g(t+h) = g(t) + hg'(t) + o_{h \rightarrow 0}(h). \end{cases}$$

1) On a, pour tout t fixé dans I :

$$\begin{aligned} (\det(f, g))(t+h) &= \det(f(t+h), g(t+h)) \\ &= \det(f(t) + hf'(t) + o(h), g(t) + hg'(t) + o(h)) \\ &= \det(f(t), g(t)) + h(\det(f'(t), g(t)) + \det(f(t), g'(t))) + o(h), \end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{h}((\det(f, g))(t+h) - (\det(f, g))(t)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \det(f'(t), g(t)) + \det(f(t), g'(t)).$$

Ceci montre que $\det(f, g)$ est dérivable sur I , et que :

$$(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g').$$

De plus, comme f, g, f', g' sont continues sur I et que $\det : \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_2$, on conclut que $\det(f, g)$ est de classe C^1 sur I .

2) Raisonnement analogue au précédent. □

2.1.3 Représentations paramétriques

Définition 2.6 (Trajectoire et représentation paramétrique). Soit $f : I \rightarrow \mathcal{E}_2$ un arc paramétré. On appelle **trajectoire** de f la partie $\{f(t); t \in I\}$ de $\mathcal{E}_2$.

On dit aussi que $\{f(t); t \in I\}$ est une **courbe** admettant f pour représentation paramétrique (en abrégé : RP).

Définition 2.7 (Changement de paramétrage et paramétrage admissible). Soit $f : I \rightarrow \mathcal{E}_2$ un arc paramétré (de classe C^k).

- 1) On appelle **changement de paramétrage** (de classe C^k) de f toute application $\varphi : J \rightarrow I$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, telle que :

$$\begin{cases} \varphi \text{ est de classe } C^k \text{ sur } J, \\ \varphi \text{ est bijective,} \\ \varphi^{-1} \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I. \end{cases}$$

- 2) On appelle **paramétrage admissible** (de classe C^k) de f toute application $g : J \rightarrow \mathcal{E}_2$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, telle qu'il existe un changement de paramétrage (de classe C^k) φ de f tel que $g = f \circ \varphi$.

2.1.4 Tangente en un point

Définition 2.8 (Point régulier, point birégulier et point stationnaire). Soient $f : I \rightarrow \mathcal{E}_2$ un arc paramétré de classe C^1 , Γ sa trajectoire, $M(t)$ un point de Γ .

- On dit que $M(t)$ est un **point régulier** de Γ si et seulement si

$$\overrightarrow{f'(t)} \neq \vec{0}.$$

- Si f est de classe C^2 , on dit que $M(t)$ est un **point birégulier** de Γ si et seulement si la famille

$$(\overrightarrow{f'(t)}, \overrightarrow{f''(t)})$$

est libre.

- Un point non régulier est aussi dit **stationnaire**.

Remarque. Les notions de point régulier et de point birégulier sont invariantes par changement de paramétrage.

En effet, soient $\varphi : J \rightarrow I$ un changement de paramétrage (de classe C^1 ou de classe C^2) et $g = f \circ \varphi$; on a, pour tout u de J :

$$\begin{cases} \overrightarrow{g'(u)} = \varphi'(u) \overrightarrow{f'(\varphi(u))} \\ \overrightarrow{g''(u)} = \varphi'(u)^2 \overrightarrow{f''(\varphi(u))} + \varphi''(u) \overrightarrow{f'(\varphi(u))}, \end{cases}$$

d'où :

$$\overrightarrow{g'(u)} \neq \vec{0} \iff \overrightarrow{f'(\varphi(u))} \neq \vec{0},$$

$$\det(\overrightarrow{g'(u)}, \overrightarrow{g''(u)}) = \varphi'(u)^3 \det(\overrightarrow{f'(\varphi(u))}, \overrightarrow{f''(\varphi(u))}),$$

$$\text{donc : } (\overrightarrow{g'(u)}, \overrightarrow{g''(u)}) \text{ libre} \iff (\overrightarrow{f'(\varphi(u))}, \overrightarrow{f''(\varphi(u))}) \text{ libre.}$$

Définition 2.9 (Arc régulier / birégulier). Soit $f : I \rightarrow \mathcal{E}_2$ un arc paramétré de classe C^1 (resp. C^2). On dit que f est **régulier** (resp. **birégulier**) si et seulement si, pour tout t de I , $M(t)$ est un point régulier (resp. birégulier) pour f .

Remarque. 1) Si f est un arc paramétré régulier, alors, pour tout changement de paramétrage (de classe C^1) φ , $f \circ \varphi$ est un arc paramétré régulier. On peut donc dire qu'une courbe Γ (de classe C^1) est régulière si et seulement s'il existe une RP régulière de Γ .

- 2) Si f est un arc paramétré birégulier, alors, pour tout changement de paramétrage (de classe C^2) φ , $f \circ \varphi$ est un arc paramétré birégulier. On peut donc dire qu'une courbe Γ (de classe C^2) est birégulière si et seulement s'il existe une RP birégulière de Γ .

Définition 2.10 (Demi-tangente et tangente en un point). Soient $f : I \longrightarrow \mathcal{E}_2$ un arc paramétré de classe C^1 , Γ sa trajectoire, $t \mapsto M(t) = f(t)$, $t_0 \in I$ et $A = M(t_0)$, aussi noté $A(t_0)$.

- 1) On dit que Γ admet une **demi-tangente** en $A(t_0^+)$ (resp. $A(t_0^-)$) si et seulement si le vecteur unitaire

$$\frac{\overrightarrow{AM(t)}}{\|\overrightarrow{AM(t)}\|}$$

(s'il existe) admet une limite lorsque t tend vers t_0^+ (resp. t_0^-). Dans ce cas, on appelle **demi-tangente** en $A(t_0^+)$ (resp. $A(t_0^-)$) à Γ la demi-droite d'origine A dirigée et orientée par cette limite.

- 2) On dit que Γ admet une **tangente** en $A(t_0)$ si et seulement si Γ admet deux demi-tangentes égales ou opposées en $A(t_0^+)$ et $A(t_0^-)$. Dans ce cas, on appelle **tangente** en $A(t_0)$ à Γ la droite passant par A et portant les deux demi-tangentes.

Remarque. L'existence d'une demi-tangente ou d'une tangente en un point de Γ est invariante par changement de paramétrage.

Théorème 2.1. Soient $f : I \longrightarrow \mathcal{E}_2$ un arc paramétré de classe C^1 , Γ sa trajectoire. En tout point régulier $A(t)$ de Γ , Γ admet une tangente et celle-ci est dirigée par $\overrightarrow{f'(t)}$.

Démonstration. En notant $M(t+h)$ le point courant de Γ , on a :

$$\overrightarrow{A(t)M(t+h)} = \overrightarrow{f(t+h)} - \overrightarrow{f(t)} = h\overrightarrow{f'(t)} + \vec{o}(h),$$

où $\vec{o}(h)$ désigne un vecteur négligeable devant h quand $h \rightarrow 0$.

Comme $\overrightarrow{f'(t)} \neq \vec{0}$, au voisinage de 0 (pour la variable h), le vecteur $h\overrightarrow{f'(t)} + \vec{o}(h)$ n'est pas nul, et donc :

$$\frac{\overrightarrow{A(t)M(t+h)}}{\|\overrightarrow{A(t)M(t+h)}\|} = \frac{h\overrightarrow{f'(t)} + \vec{o}(h)}{\|h\overrightarrow{f'(t)} + \vec{o}(h)\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \frac{\overrightarrow{f'(t)}}{\|\overrightarrow{f'(t)}\|},$$

et

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0^-} -\frac{\overrightarrow{f'(t)}}{\|\overrightarrow{f'(t)}\|}.$$

Ceci montre que Γ admet en $A(t)$ une tangente et que celle-ci est dirigée par $\overrightarrow{f'(t)}$. □

Définition 2.11 (Vecteur tangent unitaire). Soient $f : I \longrightarrow \mathcal{E}_2$ un arc paramétré de classe C^1 , Γ sa trajectoire, $A(t)$ un point régulier de Γ . On appelle **vecteur tangent unitaire (orientant)** de Γ en $A(t)$ le vecteur, noté $\overrightarrow{T(t)}$ (ou $\vec{T}$), défini par :

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{\overrightarrow{f'(t)}}{\|\overrightarrow{f'(t)}\|}.$$

Proposition 2.2. Soient $f : I \longrightarrow \mathcal{E}_2$ un arc paramétré de classe C^1 , Γ sa trajectoire, (x, y) les composantes de f dans un repère cartésien orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{E}_2$:

$$\forall t \in I, \quad f(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}.$$

Soit $M(t)$ un point régulier de Γ , et $T(t)$ la tangente en $M(t)$ à Γ .

- Si $x'(t) \neq 0$, alors $T(t)$ a pour coefficient directeur $\frac{y'(t)}{x'(t)}$.
- Si $x'(t) = 0$ (et donc $y'(t) \neq 0$), alors $T(t)$ est parallèle à l'axe des ordonnées (Oy).

Démonstration. Immédiat puisque, d'après le théorème précédent, $T(t)$ est dirigée par $\overrightarrow{f'(t)}$ et que

$$\overrightarrow{f'(t)} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}.$$

□

Proposition 2.3. Soient $f : I \longrightarrow \mathcal{E}_2$ un arc paramétré de classe C^k , Γ sa trajectoire, $t \in I$, $A(t) = f(t)$.

Si l'un au moins des vecteurs dérivés successifs $\overrightarrow{f'(t)}, \dots, \overrightarrow{f^{(k)}(t)}$ est non nul, alors Γ admet en $A(t)$ une tangente, et celle-ci est dirigée par le premier vecteur dérivé successif qui soit non nul.

Démonstration. Puisque f est de classe C^k au voisinage de t , on peut appliquer le théorème de Taylor-Young (cf. Analyse 1, 8.3.2) à chacune des composantes de f , d'où :

$$f(t+h) = f(t) + \frac{h}{1!} \overrightarrow{f'(t)} + \dots + \frac{h^k}{k!} \overrightarrow{f^{(k)}(t)} + \vec{o}(h^k).$$

Notons p le plus petit entier ≥ 1 tel que $\overrightarrow{f^{(p)}(t)} \neq \vec{0}$. On a alors (si $k \geq p$) :

$$f(t+h) - f(t) = \frac{h^p}{p!} \overrightarrow{f^{(p)}(t)} + \dots + \frac{h^k}{k!} \overrightarrow{f^{(k)}(t)} + \vec{o}(h^k).$$

d'où, comme dans la preuve du théorème précédent (et selon la parité de p et le signe de h) :

$$\frac{\overrightarrow{A(t)M(t+h)}}{\|\overrightarrow{A(t)M(t+h)}\|} \longrightarrow \frac{\overrightarrow{f^{(p)}(t)}}{\|\overrightarrow{f^{(p)}(t)}\|}.$$

Ceci montre que Γ admet en $A(t)$ une tangente, et que celle-ci est dirigée par $\overrightarrow{f^{(p)}(t)}$. □

2.1.5 Allure de la courbe au voisinage d'un point

Proposition 2.4 (1). Soient $f : I \longrightarrow \mathcal{E}_2$ un arc paramétré de classe C^1 , Γ sa trajectoire, $M(t_0)$ un point régulier de Γ , D une droite passant par $M(t_0)$ et non dirigée par $\overrightarrow{f'(t_0)}$. Alors, Γ traverse D en $M(t_0)$, c'est-à-dire qu'au voisinage de $M(t_0)$, Γ est située strictement d'un côté par rapport à D pour $t < t_0$ et t voisin de t_0 , et strictement de l'autre côté par rapport à D pour $t > t_0$ et t voisin de t_0 .

Démonstration. Notons $\vec{u}$ un vecteur directeur de D . On a, pour h au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}) &= \det(\vec{u}, h\overrightarrow{f'(t_0)} + \vec{o}(h)) \\ &= h \det(\vec{u}, \overrightarrow{f'(t_0)}) + o(h). \end{aligned}$$

Comme $\det(\vec{u}, \overrightarrow{f'(t_0)}) \neq 0$, lorsque h tend vers 0^+ (resp. 0^-), $\det(\vec{u}, \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)})$ n'est pas nul et est du signe (resp. du signe contraire) de $\det(\vec{u}, \overrightarrow{f'(t_0)})$. Donc Γ se trouve d'un côté par rapport à D pour $h < 0$ et voisin de 0, et de l'autre côté par rapport à D pour $h > 0$ et voisin de 0. □

Proposition 2.5 (Proposition-Définition 2). Soient $f : I \longrightarrow \mathcal{E}_2$ un arc paramétré de classe C^2 , Γ sa trajectoire, $M(t)$ un point birégulier de Γ . Au voisinage de t , Γ se trouve dans le demi-plan limité par la tangente en $M(t)$ à Γ et situé du côté de $\overrightarrow{f''(t)}$. On dit que Γ tourne sa concavité du côté de $\overrightarrow{f''(t)}$.

Démonstration. On a, pour h au voisinage de 0 :

$$f(t+h) - f(t) = h\overrightarrow{f'(t)} + \frac{h^2}{2} \overrightarrow{f''(t)} + \vec{o}(h^2).$$

d'où les coordonnées $(X(h), Y(h))$ de $M(t+h)$ dans le repère cartésien $(M(t); \overrightarrow{f'(t)}, \overrightarrow{f''(t)})$:

$$\begin{cases} X(h) = h + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \\ Y(h) = \frac{h^2}{2} + o_{h \rightarrow 0}(h^2), \end{cases}$$

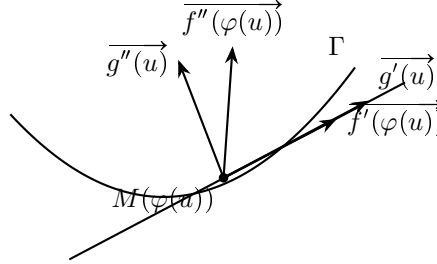
ce qui montre que, pour h voisin de 0, $M(t+h)$ est dans le demi-plan limité par la tangente en $M(t)$ à Γ et situé du côté de $\overrightarrow{f''(t)}$. □

Remarque :

La propriété précédente est invariante par changement de paramétrage de classe C^2 . En effet, si $\varphi : J \rightarrow I$ est un changement de paramétrage de classe C^2 , on a, en notant $g = f \circ \varphi$ (cf. aussi 3.1.2 1) Rem. p. 175), pour tout $u \in J$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{g'(u)} &= \varphi'(u) \overrightarrow{f'(\varphi(u))} \\ \overrightarrow{g''(u)} &= \varphi'^2(u) \overrightarrow{f''(\varphi(u))} + \varphi''(u) \overrightarrow{f'(\varphi(u))},\end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{g''(u)}$ et $\overrightarrow{f''(\varphi(u))}$ sont dans le même demi-plan limité par la tangente en $M(\varphi(u))$ à Γ .

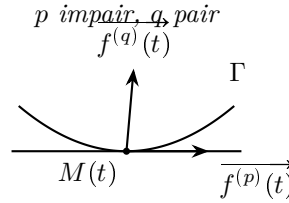
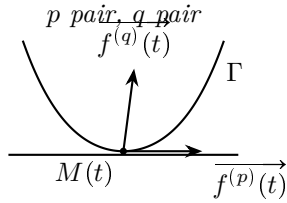


Proposition 2.6 (Proposition 3). Soient $f : I \rightarrow \mathcal{E}_2$ un arc paramétré de classe suffisante, Γ sa trajectoire, $t \in I$; on note :

$$\begin{aligned}p &\text{ le plus petit entier } \geq 1 \text{ tel que } \overrightarrow{f^{(p)}(t)} \neq \vec{0} \\ q &\text{ le plus petit entier } > p \text{ tel que } (\overrightarrow{f^{(p)}(t)}, \overrightarrow{f^{(q)}(t)}) \text{ soit libre}\end{aligned}$$

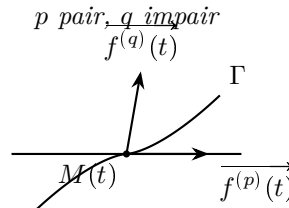
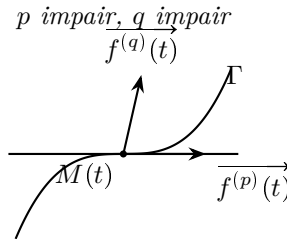
(on suppose que p et q existent).

Au voisinage de $M(t)$, Γ a l'allure suivante, selon les parités de p et q :



point de rebroussement de 2^e espèce

point à allure normale



point d'inflexion

point de rebroussement de 1^{re} espèce

Démonstration. D'après la formule de Taylor-Young :

$$f(t+h) = f(t) + \sum_{k=1}^q \frac{h^k}{k!} \overrightarrow{f^{(k)}(t)} + o(h^q).$$

Notons, pour $k \in \{1, \dots, q\}$, $\vec{V}_k = \overrightarrow{f^{(k)}(t)}$. Par hypothèse, il existe $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{q-1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall k \in \{p+1, \dots, q-1\}, \quad \vec{V}_k = \lambda_k \vec{V}_p.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}f(t+h) - f(t) &= \left(\frac{h^p}{p!} + \lambda_{p+1} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} + \dots + \lambda_{q-1} \frac{h^{q-1}}{(q-1)!} \right) \vec{V}_p \\ &\quad + \frac{h^q}{q!} \vec{V}_q + o(h^q).\end{aligned}$$

Dans le repère cartésien $(M(t) : \vec{V}_p, \vec{V}_q)$, en notant (X, Y) les coordonnées d'un point courant de Γ , on a :

$$\begin{cases} X(t+h) = h^p \left(\frac{1}{p!} + \frac{\lambda_{p+1}}{(p+1)!}h + \dots + \frac{\lambda_{q-1}}{(q-1)!}h^{q-p-1} \right) + o(h^q), \\ Y(t+h) = \frac{h^q}{q!} + o(h^q). \end{cases}$$

Si p et q sont pairs (par exemple), alors, au voisinage de 0, les coordonnées $X(t+h)$ et $Y(t+h)$ de $M(t+h)$ sont > 0 , et respectivement équivalentes à $\frac{h^p}{p!}$ et $\frac{h^q}{q!}$, d'où l'allure proposée (point de rebroussement de seconde espèce).

Raisonnement analogue pour les trois autres cas. $\square$

Remarque. 1. Au lieu du calcul des dérivées successives de f en t , il est possible d'envisager l'utilisation de développements limités (cf. Exemple 2 p. 181).

2. Dans le cas d'un point de rebroussement de seconde espèce, il est nécessaire de distinguer les deux branches de Γ , c'est-à-dire de déterminer laquelle correspond à $h \rightarrow 0^+$ et laquelle correspond à $h \rightarrow 0^-$ (cf. Exemple 3 p. 182).

3. Si $\vec{f}'(t) \neq \vec{0}$ et si $M(t)$ est un point d'inflexion de Γ , alors $(\vec{f}'(t), \vec{f}''(t))$ est liée. On pourra donc, en pratique, chercher les points d'inflexion de la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

parmi les points satisfaisant l'équation :

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 0.$$

Parmi ces points, ceux pour lesquels p et q sont impairs sont des points d'inflexion.

Exemple. Montrer que la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = (t+1)e^t \\ y = t^2e^t \end{cases}$$

admet un point non régulier et un seul, et tracer l'allure de Γ au voisinage de ce point.

Les applications x, y sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = (t+2)e^t \\ y'(t) = (t^2+2t)e^t \end{cases}$$

On a donc, pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \iff t = -2.$$

Ainsi, Γ admet un point non régulier et un seul, correspondant à $t = -2$, de coordonnées $(-e^{-2}, 4e^{-2})$.

On obtient, pour tout t de $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x''(t) = (t+3)e^t \\ y''(t) = (t^2+4t+2)e^t \end{cases},$$

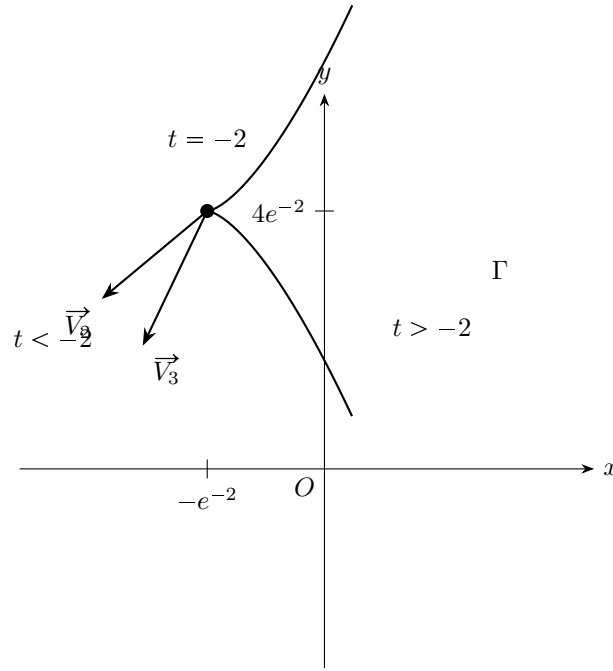
puis

$$\begin{cases} x'''(t) = (t+4)e^t \\ y'''(t) = (t^2+6t+6)e^t \end{cases},$$

d'où, en notant $\vec{V}_k = \overrightarrow{f^{(k)}(-2)}$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$, les coordonnées de $\vec{V}_k$ dans $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$:

$$\vec{V}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_2 \begin{pmatrix} -e^{-2} \\ -2e^{-2} \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_3 \begin{pmatrix} -2e^{-2} \\ -2e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Comme $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$ et $(\vec{V}_2, \vec{V}_3)$ libre, avec les notations de la Proposition 3 p. 179, on a $p = 2$ et $q = 3$, et donc le point $M(-2)$ de Γ est un point de rebroussement de première espèce ; la tangente en $M(-2)$ à Γ est dirigée par $\vec{V}_2$, qui est lui-même colinéaire à $\vec{i} - 2\vec{j}$.



2) Montrer que la courbe Γ de représentation paramétrique $\left(x = \frac{4t-3}{t^2+1}, y = \frac{2t-1}{t^2+2}\right)$ admet un point non régulier et un seul, et tracer l'allure de Γ au voisinage de ce point. Les applications x, y sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = \frac{-4t^2 + 6t + 4}{(t^2 + 1)^2}, \quad y'(t) = \frac{-2t^2 + 2t + 4}{(t^2 + 2)^2}.$$

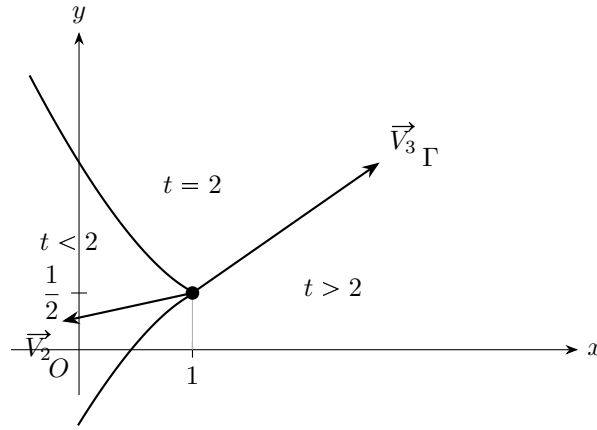
On a donc, pour tout t de $\mathbb{R}$: $\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{array} \right\} \iff t = 2$. Ainsi, Γ admet un point non régulier et un seul, correspondant à $t = 2$, et de coordonnées $(1, \frac{1}{2})$. Utilisons ici des développements limités en $t = 2$; notons $h = t - 2, h \xrightarrow[t \rightarrow 2]{} 0$. On a :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4t-3}{t^2+1} = \frac{5+4h}{5+4h+h^2} = 1 - \frac{h^2}{5+4h+h^2} \\ &= 1 - \frac{h^2}{5} \left(1 + \frac{4}{5}h + \frac{1}{5}h^2\right)^{-1} = 1 - \frac{h^2}{5} \left(1 - \frac{4}{5}h + o(h)\right) \\ &= 1 - \frac{h^2}{5} + \frac{4h^3}{25} + o(h^3), \\ y(t) &= \frac{2t-1}{t^2+2} = \frac{3+2h}{6+4h+h^2} = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{2(6+4h+h^2)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12} \left(1 + \frac{2}{3}h + \frac{1}{6}h^2\right)^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12} \left(1 - \frac{2}{3}h + o(h)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12} + \frac{h^3}{18} + o(h^3). \end{aligned}$$

Par unicité du $DL_3(0)$ de $h \mapsto (x(2+h), y(2+h))$, on obtient, en identifiant avec la formule de Taylor-Young :

$$\vec{V}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_3 \begin{pmatrix} \frac{24}{25} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Puisque $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$ et $(\vec{V}_2, \vec{V}_3)$ libre, on a $p = 2$ et $q = 3$, donc le point $M(2)$ de Γ est un point de rebroussement de première espèce.



3) Tracer l'allure de la courbe Γ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t^4 - t^3 - t^2 \\ y = t^4 + t^3 + t^2 \end{cases}$ au voisinage du point de paramètre $t = 0$.

On a : $x(t) = -t^2 - t^3 + t^4 + o(t^4)$, $y(t) = t^2 + t^3 + t^4 + o(t^2)$. d'où $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{V}_3 \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{V}_4 \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix}$, et donc $p = 2$ et $q = 4$. Le point O , de paramètre $t = 0$, est donc un point de rebroussement de seconde espèce, la tangente en O à Γ est dirigée par $\vec{V}_2$.

Dans le repère cartésien $\mathcal{R}' = (O; \vec{l}, \vec{j})$, où $\vec{l} = -\vec{i} + \vec{j} = \frac{1}{2}\vec{V}_2$ et $\vec{j} = \vec{i} + \vec{j} = \frac{1}{24}\vec{V}_4$, Γ admet la RP : $\begin{cases} X(t) = t^2 + t^3 \\ Y(t) = t^4 \end{cases}$. Une parallèle à $X'X$ coupe Γ en deux points correspondant à des valeurs opposées $t, -t$ du paramètre et (si $t > 0$) ;

$$X(t) = t^2 + t^3 > t^2 - t^3 = X(-t).$$

Ceci montre que l'arc de Γ correspondant à $t \rightarrow 0^+$ est situé à gauche de celui correspondant à $t \rightarrow 0^-$, dans le repère $\mathcal{R}$, ce qui permet de distinguer les deux branches de Γ .

4) Tracer l'allure de la courbe Γ de RP $\begin{cases} x = t^3 + t^4 \\ y = t^5 + t^7 \end{cases}$ au voisinage du point de paramètre $t = 0$.

L'énoncé fournit directement des $DL(0)$ de x et y , d'où (puisque x et y sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$), par identification avec la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= \vec{0}, \quad \vec{V}_2 = \vec{0}, \quad \vec{V}_3 = 3!\vec{i} = 6\vec{i} \\ \vec{V}_4 &= 4!\vec{i} = 24\vec{i} \quad \text{colinéaire à } \vec{V}_3 \\ \vec{V}_5 &= 5!\vec{j}. \end{aligned}$$

Ici, $p = 3$ et $q = 5$, donc O est un point d'inflexion de Γ : la tangente en O à Γ est $x'x$.

2.1.6 Branches infinies

Soient $f : I \rightarrow \mathcal{E}_2$ un arc paramétré, Γ sa trajectoire, $t_0 \in \bar{I}$ (éventuellement, $t_0 = -\infty$ ou $t_0 = +\infty$), $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}_2$, (x, y) les composantes de f dans $\mathcal{R}$.

On dit que Γ admet une branche infinie lorsque t tend vers t_0 si et seulement si $\|f(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} +\infty$. ce qui revient à : $(x(t))^2 + (y(t))^2 \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} +\infty$. En particulier, si $|x(t)| \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} +\infty$ ou $|y(t)| \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} +\infty$, alors Γ admet une branche infinie lorsque t tend vers t_0 .

Supposons que Γ admette une branche infinie lorsque t tend vers t_0 .

1) On dit que Γ admet une direction asymptotique, lorsque t tend vers t_0 , si et seulement s'il existe un point A de $\mathcal{E}_2$ tel que $\frac{\overrightarrow{AM}(t)}{\|\overrightarrow{AM}(t)\|}$ admette une limite lorsque t tend vers t_0 . Si c'est le cas, alors, pour tout point B de $\mathcal{E}_2$, $\frac{\overrightarrow{BM}(t)}{\|\overrightarrow{BM}(t)\|}$ admet aussi la même limite quand t tend vers t_0 , puisque :

$$\frac{\overrightarrow{BM}(t)}{\|\overrightarrow{BM}(t)\|} = \frac{\|\overrightarrow{AM}(t)\|}{\|\overrightarrow{BM}(t)\|} \frac{\overrightarrow{AM}(t)}{\|\overrightarrow{AM}(t)\|} - \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{BM}(t)\|}$$

et que $\|\overrightarrow{AM}(t)\|_{t \rightarrow t_0} \|\overrightarrow{BM}(t)\|$.

On appelle alors direction asymptotique de Γ , lorsque t tend vers t_0 , la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{u}$, où $\vec{u} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{AM}(t)}{\|\overrightarrow{AM}(t)\|}$.

2) On dit qu'une droite D est asymptote à Γ lorsque t tend vers t_0 si et seulement s'il existe un vecteur $\vec{v}$ tel que, en notant $\vec{u}$ un vecteur directeur de D , $(\vec{u}, \vec{v})$ soit libre et que, en notant $(X(t), Y(t))$ les coordonnées du point courant $M(t)$ de Γ dans le repère cartésien $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on ait :

$$\begin{cases} X(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} +\infty \text{ ou } -\infty \\ Y(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On montre que cette propriété est indépendante du choix de $\vec{v}$ (tel que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit libre) et est invariante par changement de paramétrage.

Lorsque Γ admet une direction asymptotique (quand t tend vers t_0) mais pas d'asymptote (quand t tend vers t_0), on dit que Γ admet une branche parabolique.

En pratique, si $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \pm\infty$ et $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \pm\infty$, on forme $\frac{y(t)}{x(t)}$, puis :

- si $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \pm\infty$, alors Γ admet une branche parabolique de direction asymptotique $y'y$
- si $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} 0$, alors Γ admet une branche parabolique de direction asymptotique $x'x$
- si $\begin{cases} \frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} a \in \mathbb{R}^* \\ y(t) - ax(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \pm\infty \end{cases}$, alors Γ admet une branche parabolique de direction asymptotique d'équation $y = ax$
- si $\begin{cases} \frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} a \in \mathbb{R}^* \\ y(t) - ax(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} b \in \mathbb{R} \end{cases}$, alors Γ admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote.

Dans le cas où Γ admet une asymptote Δ d'équation $y = ax + b$ (quand t tend vers t_0), il est utile, pour le trace de I , de connaître la position relative de Γ et de Δ (lorsque t tend vers t_0). Pour $t \in I$, considérons $M(t) \in \Gamma$ et $P(t)$ le point de Δ de même abscisse $x(t)$ que $M(t)$. La position de Γ par rapport à Δ est donnée par le signe de $P(t)M(t)$, c'est-à-dire de :

$$y(t) - (ax(t) + b).$$

Exemple. 1) Étudier la branche infinie de

$$\Gamma : \begin{cases} x = \frac{3}{t(t-2)} \\ y = \frac{t^2-3}{t} \end{cases}$$

lorsque t tend vers 0.

Puisque $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^\pm]{} \mp\infty$ et $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^\pm]{} \mp\infty$, Γ admet une branche infinie lorsque t tend vers 0.

On a :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{(t^2-3)(t-2)}{3} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 2,$$

donc Γ admet une direction asymptotique, d'équation $y = 2x$.

Puis :

$$y(t) - 2x(t) = \frac{t^2-3}{t} - \frac{6}{t(t-2)} = \frac{3+2t-t^2}{2-t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{3}{2},$$

donc Γ admet la droite Δ d'équation $y = 2x + \frac{3}{2}$ comme asymptote.

Enfin, étudions la position de la courbe par rapport à Δ :

$$y(t) - \left(2x(t) + \frac{3}{2}\right) = (y(t) - 2x(t)) - \frac{3}{2} = \frac{3+2t-t^2}{2-t} - \frac{3}{2} = \frac{t(7-2t)}{2(2-t)}.$$

Pour t au voisinage de 0, le dénominateur $2(2-t)$ est positif et $7-2t$ est positif; le signe de cette différence est donc celui de t . Par conséquent :

- si $t > 0$ (au voisinage de 0^+), $y > 2x + \frac{3}{2}$: la courbe est au-dessus de l'asymptote;
- si $t < 0$ (au voisinage de 0^-), $y < 2x + \frac{3}{2}$: la courbe est en dessous de l'asymptote.

On a ainsi décrit complètement la branche infinie au voisinage de $t = 0$.

$$\begin{aligned} y(t) - \left(2x(t) + \frac{3}{2}\right) &= \frac{3+2t-t^2}{2-t} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{7t-2t^2}{2(2-t)} \approx \frac{7}{4}t \end{aligned}$$

donc Γ est au-dessus de Δ lorsque $t \rightarrow 0^+$, et Γ est au-dessous de Δ lorsque $t \rightarrow 0^-$.

Les calculs précédents sont susceptibles de variantes. Par exemple, puisque $x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{3}{2t}$ et $y(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{3}{t}$, on

a $y(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2x(t)$.

2) Étudier la branche infinie de Γ de RP $x = \frac{t^3+1}{t^2+1}, y = \frac{t^4+1}{t^2+1}$, lorsque t tend vers $+\infty$.

Puisque $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ et $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$, Γ admet une branche infinie lorsque t tend vers $+\infty$.

On a : $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^4+1}{t^3+1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t$, donc $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$, et Γ admet une branche parabolique de direction asymptotique $(y'y)$.

3) Étudier la branche infinie de Γ de RP $\left\{ \begin{array}{l} x = 4t^3 + 3t^2 - 6t \\ y = 3t^2 + 2t + 1 \end{array} \right\}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

On a : $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$, $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$, $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{4t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donne l' admet une branche parabolique de direction asymptotique $x'x$.

4) Étudier la branche infinie de Γ de RP $\left\{ \begin{array}{l} x = 3t^2 + t \\ y = 6t^2 - t + \frac{1}{t^3} \end{array} \right\}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

On a : $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$, $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$, $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 2$, $y(t) - 2x(t) = -3t + \frac{1}{t^3} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$, donc Γ admet une branche parabolique de direction asymptotique d'équation $y = 2x$.

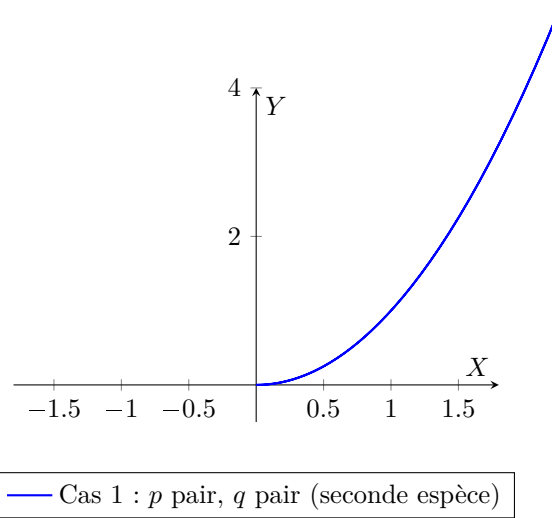


FIGURE 2.1 – Point de rebroussement de seconde espèce ($p = 2, q = 4$). Les deux branches sont dans le premier quadrant.

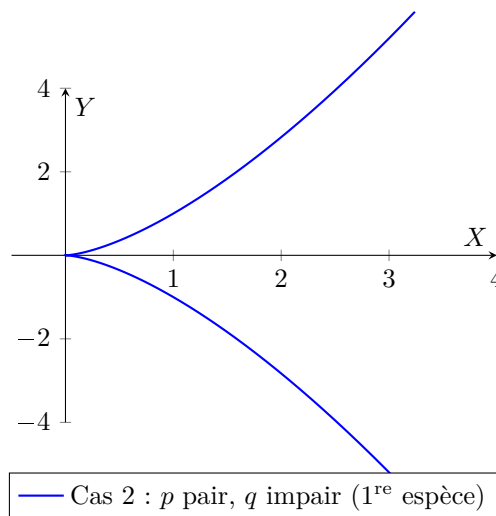


FIGURE 2.2 – Point de rebroussement de première espèce ($p = 2, q = 3$). Une branche dans le premier quadrant, l'autre dans le quatrième.

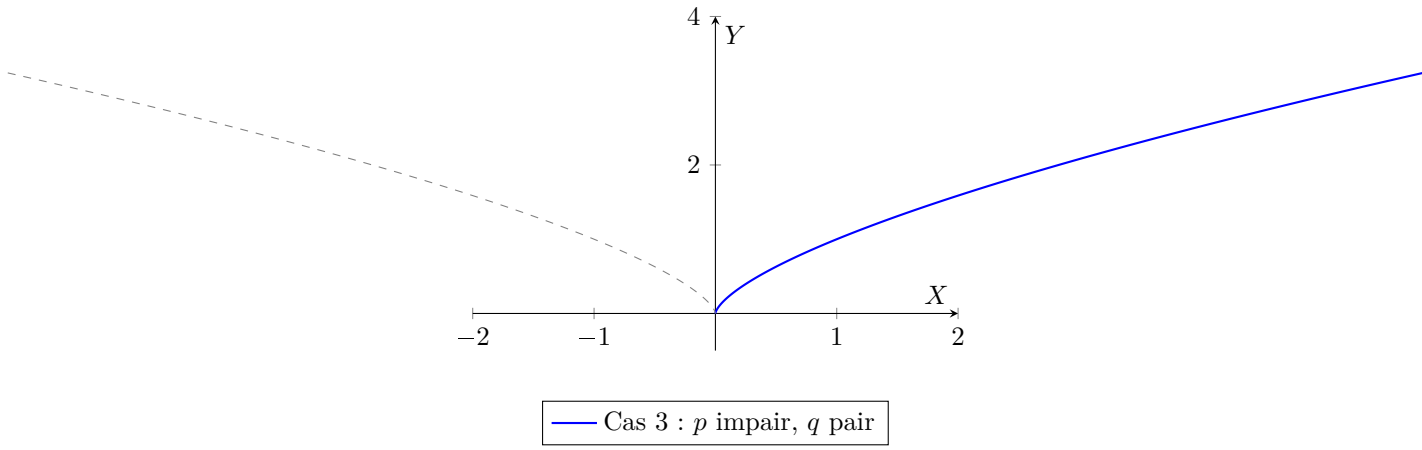


FIGURE 2.3 – Cas 3 ($p = 3, q = 2$). La branche $t > 0$ est dans le premier quadrant (trait plein) ; la branche $t < 0$ est dans le deuxième quadrant (pointillé).

2.1.7 Symétries

Soit Γ une courbe de $\mathcal{E}_2$, de représentation paramétrique $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Recherchons d'éventuelles symétries de Γ , c'est-à-dire des isométries de $\mathcal{E}_2$ laissant Γ globalement invariante.

Soient $\psi' : I \rightarrow I$ un changement de paramétrage et I' un sous-intervalle de I tel que $I = I' \cup \psi(I')$ et que $I' \cap \psi(I')$ soit vide ou soit un singleton.

En pratique, ψ et I' sont souvent de la forme :

- $\psi :]-a; a[\rightarrow]-a; a[$, $I' = [0; a[$
- $\psi : [a; b] \rightarrow [a; b]$, $I' = [a; \frac{a+b}{2}]$
- $\psi :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$, $I' =]0; 1]$.

$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

Suivant l'éventuelle formule liant $f \circ \psi$ et f , on fait varier t dans I' , d'où une courbe Γ' , puis une courbe Γ'' déduite de Γ' , et $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$.

Hypothèses sur x, y, ψ (pour tout t de I)	Isométrie permettant de passer de Γ' à Γ''
$\begin{cases} x(\psi(t)) = x(t) \\ y(\psi(t)) = y(t) \end{cases}$	Identité
$\begin{cases} x(\psi(t)) = x(t) + \alpha \\ y(\psi(t)) = y(t) + \beta \end{cases}$	Translation de vecteur $\alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$
$\begin{cases} x(\psi(t)) = -x(t) \\ y(\psi(t)) = y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à $y'y$, parallèlement à $x'x$
$\begin{cases} x(\psi(t)) = x(t) \\ y(\psi(t)) = -y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à $x'x$, parallèlement à $y'y$
$\begin{cases} x(\psi(t)) = -x(t) \\ y(\psi(t)) = -y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à O
$\begin{cases} x(\psi(t)) = y(t) \\ y(\psi(t)) = x(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à la 1 ^{ère} bissectrice, parallèlement à la 2 ^{nde} .

Cette liste n'est pas limitative.

2.1.8 Points multiples

Soit Γ une courbe de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

Définition 2.12 (Point multiple). Un point $M(x, y)$ de Γ est dit *point multiple* de Γ si et seulement s'il existe

$(u, v) \in I^2$ tel que :

$$\begin{cases} x = x(u) = x(v) \\ y = y(u) = y(v) \\ u \neq v. \end{cases}$$

En pratique, on suppose que la représentation paramétrique de Γ est *propre*, c'est-à-dire, pour simplifier, que les points de Γ , sauf « certains » d'entre eux, correspondent à une valeur unique du paramètre.

Si $M \in \Gamma$ correspond exactement à deux valeurs distinctes du paramètre, on dit que M est un *point double* de Γ .

Définitions analogues pour point triple, point quadruple...

Exemple. Montrer que la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t + 1 + \frac{1}{t-1} \\ y = t^2 + 1 + \frac{1}{t} \end{cases}$$

admet un point double M (et un seul), préciser les coordonnées de M et les valeurs du paramètre correspondant à M .

On résout le système d'équations (S)

$$\begin{cases} x(u) = x(v) \\ y(u) = y(v) \\ u \neq v \end{cases}$$

d'inconnue $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

On a :

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} \frac{u^2}{u-1} = \frac{v^2}{v-1} \\ \frac{u^3+u+1}{u} = \frac{v^3+v+1}{v} \\ u \neq v \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} uv(u-v) - (u^2-v^2) = 0 \\ uv(u^2-v^2) - (u-v) = 0 \\ u \neq v \end{cases} \iff \begin{cases} uv - (u+v) = 0 \\ uv(u+v) - 1 = 0 \\ u \neq v. \end{cases} \end{aligned}$$

Notons $S = u + v$ et $P = uv$. Alors u, v sont les solutions de l'équation $t^2 - St + P = 0$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$(S) \iff \begin{cases} P = S \\ PS = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} P = S = 1 \\ \text{ou} \\ P = S = -1. \end{cases}$$

L'équation $t^2 - t + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle. L'équation $t^2 + t - 1 = 0$ admet exactement deux solutions réelles :

$$u = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad v = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Déterminons maintenant les coordonnées du point double M . Puisque u et v sont racines de $t^2 + t - 1 = 0$, on a $t^2 = 1 - t$ et $\frac{1}{t} = t + 1$ (pour $t \neq 0$). De plus, $\frac{1}{t-1} = -(t+2)$ car $(t-1)(t+2) = t^2 + t - 2 = (1-t) + t - 2 = -1$.

Ainsi, pour $t = u$ ou $t = v$:

$$x(t) = t + 1 + \frac{1}{t-1} = t + 1 - (t+2) = -1,$$

et

$$y(t) = t^2 + 1 + \frac{1}{t} = (1-t) + 1 + (t+1) = 3.$$

Par conséquent, le point double unique est

$$M(-1, 3),$$

correspondant aux deux valeurs du paramètre $u = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $v = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

$$v = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Pour calculer les coordonnées (x, y) du point double M (correspondant à u et v), remarquons que x et y sont symétriques en u, v , donc peuvent s'exprimer à l'aide de S et P :

$$\begin{aligned} -2x &= x(u) + x(v) = \frac{u^2}{u-1} + \frac{v^2}{v-1} = \frac{uv(u+v) - (u^2 + v^2)}{uv - (u+v) + 1} \\ &= \frac{SP - (S^2 - 2P)}{P - S + 1} = -2, \text{ d'où } x = -1 \\ 2y &= y(u) + y(v) = \left(u^2 + 1 + \frac{1}{u}\right) + \left(v^2 + 1 + \frac{1}{v}\right) \\ &= u^2 + v^2 + 2 + \frac{u+v}{uv} = S^2 - 2P + 2 + \frac{S}{P} = 6, \text{ d'où } y = 3. \end{aligned}$$

Ou encore, en utilisant $u^2 + u - 1 = 0$:

$$x(u) = \frac{u^2}{u-1} = -\frac{u-1}{u-1} = -1, \quad y(u) = u^2 + 1 + \frac{1}{u} = u^2 + 1 + (u+1) = 3.$$

Finalement, Γ admet un point double et un seul, correspondant aux valeurs $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ du paramètre, et de coordonnées $(-1, 3)$.