

Calcul différentiel avancé

Filière Licence Mathématiques et Modélisation
Numérique
Deuxième Année

Dr Mohamed A. SANA
UNIVERSITÉ VIRTUELLE DE COTE D'IVOIRE

2026-2027

Table des matières

1	Compléments de calcul différentiel en dimension finie	1
1.1	Théorème du point fixe - Applications	1
1.1.1	Théorème du point fixe	1
1.1.2	Théorème de l'inversion locale	2
1.1.3	Fonctions implicites	3

Chapitre 1

Compléments de calcul différentiel en dimension finie

1.3 Théorème du point fixe - Applications

1.3.1 Théorème du point fixe

Théorème 1.1 (Théorème du point fixe). *Soient $F \in \mathfrak{B}(E)$, $f : F \longrightarrow F$ une application.*

Si F est complète et si f est contractante, alors f admet un point fixe et un seul, et, pour tout a de F , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

converge vers le point fixe de f .

Rappelons :

- x est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x$.
- f est contractante si et seulement s'il existe $k \in [0; 1[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in F^2, \quad d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y).$$

Exercice 1.1. Dans chacun des cas suivants, montrer que la conclusion du théorème du point fixe n'est pas vérifiée, puis expliciter l'hypothèse qui n'est pas satisfaite :

- (i) $\Omega =]0, 1]$ et $f : x \mapsto x/2$,
- (ii) $\Omega = [0, 1]$ et $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$,
- (iii) $\Omega = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$,
- (iv) $\Omega = [0, \pi/2]$ et $f : x \mapsto \sin(x)$.

En fait on aura besoin d'une version à paramètre de ce théorème du point fixe :

Théorème 1.2 (Théorème du point fixe à paramètre). *Soit Ω une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et Λ une partie de $\mathbb{R}^m$. Soit f une fonction continue de $\Omega \times \Lambda \subset \mathbb{R}^{n+m}$ dans Ω . On suppose que f est uniformément contractante : il existe $K \in [0, 1[$ tel que pour tous $x, y \in \Omega$ et $\lambda \in \Lambda$ on a*

$$\|f(x, \lambda) - f(y, \lambda)\| \leq K \|x - y\|.$$

Alors pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'application $x \mapsto f(x, \lambda)$ admet un unique point fixe a_λ (solution de l'équation $f(a_\lambda, \lambda) = a_\lambda$) dans Ω . En outre l'application $\lambda \mapsto a_\lambda$ est continue de Λ dans Ω .

Preuve. 1) Si x, y sont deux points fixes de f alors :

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y),$$

d'où $d(x, y) = 0$, puisque $k \in [0; 1[$. Ainsi, f admet au plus un point fixe.

2) Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f .

- Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F . Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d(u_n, u_{n+1}) = d(f(u_{n-1}), f(u_n)) \leq k d(u_{n-1}, u_n),$$

d'où, par récurrence : $d(u_n, u_{n+1}) \leq k^n d(u_0, u_1)$.

Puis, pour tout $(p, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} d(u_p, u_{p+r}) &\leq \sum_{i=0}^{r-1} d(u_{p+i}, u_{p+i+1}) \\ &\leq \sum_{i=0}^{r-1} k^{p+i} d(u_0, u_1) \\ &= k^p \frac{1 - k^r}{1 - k} d(u_0, u_1) \\ &\leq k^p \frac{d(u_0, u_1)}{1 - k}. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$; puisque $k^p \frac{d(u_0, u_1)}{1 - k} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \left(p \geq N \implies k^p \frac{d(u_0, u_1)}{1 - k} \leq \varepsilon \right).$$

On a alors :

$$\forall (p, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad (p \geq N \implies d(u_p, u_{p+r}) \leq \varepsilon),$$

et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F .

- Puisque F est complet, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément ℓ de F . Comme f est continue (car k -lipschitzienne), on déduit $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\ell)$. Mais d'autre part $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$. Finalement : $f(\ell) = \ell$.

On remarquera les relations

$$d(u_n, \ell) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(u_0, u_1) \quad \text{et} \quad d(u_n, \ell) \leq \frac{k}{1 - k} d(u_{n-1}, u_n) \quad (\text{pour } n \geq 1),$$

utiles en vue du Calcul Numérique. □

1.3.2 Théorème de l'inversion locale

Théorème 1.3 (Théorème de l'inverse local). Soient U un ouvert de E , $\phi : U \longrightarrow F$ de classe C^1 , $a \in U$. Si $d_a \phi$ est bijective, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \dim(E) = \dim(F) \\ \bullet \text{Il existe un voisinage ouvert } V \text{ de } a \text{ dans } E \text{ tel que } \phi \text{ soit un } C^1\text{-difféomorphisme de } V \text{ sur } \phi(V). \end{array} \right.$$

La deuxième partie de la conclusion du théorème signifie plus précisément : il existe un voisinage ouvert V de a dans E tel que $\phi(V)$ soit un voisinage ouvert de $\phi(a)$ dans F et que la restriction

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : V &\longrightarrow \phi(V) \\ x &\longmapsto \phi(x) \end{aligned}$$

soit un C^1 -difféomorphisme de V sur $\phi(V)$.

Preuve (pouvant être omise en première lecture). En munissant E et F de bases, il est clair qu'on peut se ramener au cas où $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^n$, munis de leurs bases canoniques et de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Comme $d_a \phi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est linéaire bijective, on a nécessairement $p = n$. □

Corollaire 1.1. Soient U (resp. V) un ouvert de E (resp. F), $\phi : U \longrightarrow V$.

Si l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } U, \\ \phi \text{ est bijective,} \\ \text{Pour tout } a \in U, d_a \phi \text{ est une bijection de } E \text{ sur } F, \end{array} \right.$$

alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dim(E) = \dim(F), \\ \phi \text{ est un } C^1\text{-difféomorphisme de } U \text{ sur } V. \end{array} \right.$$

Démonstration. Soit $b \in V$. D'après le théorème de l'inverse local, appliqué en $a = \phi^{-1}(b)$, il existe un voisinage U_1 de a dans E , inclus dans U , tel que ϕ soit un C^1 -difféomorphisme de U_1 sur $\phi(U_1)$. Alors $\phi(U_1)$ est un voisinage ouvert de b dans F , et ϕ^{-1} est de classe C^1 sur $\phi(U_1)$.

Puisque ϕ^{-1} est de classe C^1 au voisinage de tout point de V , il en résulte aisément que ϕ^{-1} est de classe C^1 sur V . $\square$

Remarque. Le corollaire précédent est surtout utile dans le cas où ϕ^{-1} est difficilement « exprimable », ou n'est pas exprimable.

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

Exemple. (1) Changement de variables affine

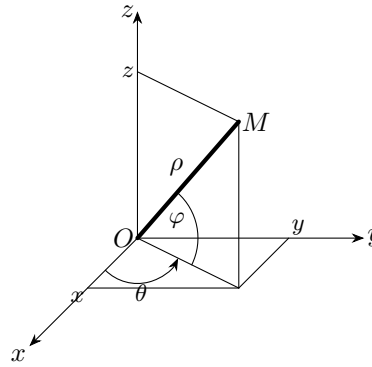
Si $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est affine et bijective, alors ϕ est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$; en effet, ϕ est de classe C^1 , bijective, et, en notant $\vec{\phi}$ l'application linéaire associée à ϕ (définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \vec{\phi}(x) = \phi(x) - \phi(0)$), on a : $\forall a \in \mathbb{R}^n, d_a \phi = \vec{\phi} \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$. Par exemple, $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un C^1 -difféomorphisme. On peut aussi remarquer plus élémentairement que ϕ et ϕ^{-1} sont affines et bijectives.

(2) (Passage en coordonnées sphériques) Soient

$$U =]-\pi; \pi[\times]0; +\infty[\times \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[,$$

et

$$V = \mathbb{R}^3 - (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}).$$



On montre facilement que l'application $\phi : U \longrightarrow V$ définie par

$$\phi(\theta, \rho, \varphi) = (\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$$

est de classe C^1 et bijective.

De plus, pour tout $(\theta, \rho, \varphi) \in U$:

$$\det(J_\phi(\theta, \rho, \varphi)) = \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\rho \cos \theta \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = -\rho^2 \cos \varphi \neq 0.$$

D'après le Corollaire précédent, ϕ est un C^1 -difféomorphisme de U sur V .

1.3.3 Fonctions implicites

Théorème 1.4 (Théorème des fonctions implicites). Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, $A = (a, b) \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 sur U , $f_1, \dots, f_n$ les composantes de f :

$$\forall x \in U, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

On suppose :

$$f(A) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{p+j}}(A) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Alors il existe un voisinage ouvert v de a dans $\mathbb{R}^p$ et un voisinage ouvert w de b dans $\mathbb{R}^n$ tels que :

- $v \times w \subset U$,
- Il existe une application unique $\varphi : v \longrightarrow w$ telle que :

$$\forall x \in v, \quad f(x, \varphi(x)) = 0,$$

- φ est de classe C^1 sur v .

De plus, il existe un voisinage v' de a dans $\mathbb{R}^p$, inclus dans v , tel que, pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in v'$:

$$J_\varphi(x_1, \dots, x_p) = - \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}}(x, \varphi(x)) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+n}}(x, \varphi(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+1}}(x, \varphi(x)) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+n}}(x, \varphi(x)) \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x, \varphi(x)) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x, \varphi(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x, \varphi(x)) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(x, \varphi(x)) \end{array} \right).$$

Preuve (pouvant être omise en première lecture). – Considérons l'application

$$\begin{aligned} \phi : \quad U &\longrightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longmapsto (x, f(x, y)) \end{aligned}$$

Il est clair que ϕ est de classe C^1 sur U (par composition) et la matrice jacobienne de ϕ en (a, b) est :

$$J_\phi(a, b) = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(A) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(A) & \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}}(A) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+n}}(A) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(A) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(A) & \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+1}}(A) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+n}}(A) \end{array} \right).$$

D'après l'hypothèse, on a :

$$\det(J_\phi(a, b)) = \det \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{p+j}}(A) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right) \neq 0,$$

ce qui montre que $d_{(a,b)}\phi$ est bijective.

D'après le théorème de l'inverse local (8.1.6 Th. p. 182), il existe un voisinage ouvert u de (a, b) dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ tel que $\phi(u)$ soit un voisinage ouvert de $(a, 0)$ dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ et que ϕ soit un C^1 -difféomorphisme de u sur $\phi(u)$.

Il existe ensuite un voisinage ouvert v_1 de a dans $\mathbb{R}^p$ et un voisinage ouvert w de b dans $\mathbb{R}^n$ tels que $v_1 \times w \subset u$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \phi_1 : \quad v_1 \times w &\longrightarrow \phi(v_1 \times w) \\ (x, y) &\longmapsto \phi(x, y) \end{aligned}$$

est un C^1 -difféomorphisme de $v_1 \times w$ sur $\phi(v_1 \times w)$.

Puisque $\phi(v_1 \times w)$ est un voisinage de $\phi(a, b) = (a, 0)$ dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage ouvert v de a dans $\mathbb{R}^p$ tel que $v \times \{0\} \subset \phi(v_1 \times w)$.

Alors :

$$\forall x \in v, \quad (x, 0) \in \phi(v_1 \times w),$$

et donc l'équation $f(x, y) = 0$, d'inconnue $y \in w$, admet une solution et une seule, qui est $\phi_1^{-1}(x, 0)$.

Ceci montre l'existence et l'unicité de φ ; φ est de plus définie par :

$$\forall x \in v, \quad (x, \varphi(x)) = \phi_1^{-1}(x, 0)$$

et donc φ est de classe C^1 sur v .

- L'application $\delta : x \longrightarrow \det \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{p+j}}(x, \varphi(x)) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right)$ est continue sur v , et $\delta(a) \neq 0$ par hypothèse. Il existe donc un voisinage v' de a dans $\mathbb{R}^p$, inclus dans v , tel que :

$$\forall x \in v', \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{p+j}}(x, \varphi(x)) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}).$$

D'autre part, puisque f et φ sont de classe C^1 et que $(\forall x \in v, \quad f(x, \varphi(x)) = 0)$, on déduit en dérivant et en notant $\varphi_1 \dots \varphi_n$ les applications composantes de φ ;

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, \varphi(x)) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_{p+k}}(x, \varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x, \varphi(x)) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x, \varphi(x)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}}(x, \varphi(x)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+n}}(x, \varphi(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+1}}(x, \varphi(x)) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+n}}(x, \varphi(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_p}(x) \end{pmatrix} = 0,$$

d'où le résultat voulu, en utilisant un inverse de matrice. $\square$

La conclusion du théorème des fonctions implicites peut s'exprimer brièvement sous la forme : $x_{p+1}, \dots, x_{p+n}$ sont, au voisinage de A , des fonctions implicites de classe C^1 de $x_1, \dots, x_p$.

- Remarque.* 1. Si $p = n = 1$, on retrouve le théorème des fonctions implicites pour deux variables réelles liées par une relation, vu dans le Tome 2, 13.6.2 p. 184.
2. Si $p = 2$ et $n = 1$, on retrouve le théorème des fonctions implicites pour trois variables réelles liées par une relation, vu dans le Tome 2, 13.6.3 p. 190.
3. Si $p = 1$ et $n = 2$, le théorème des fonctions implicites prend la forme suivante. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $A = (a, b, c) \in U$, $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications.

On suppose :

$$\begin{cases} f(A) = g(A) = 0, \\ f, g \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } U, \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(A) & \frac{\partial f}{\partial z}(A) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(A) & \frac{\partial g}{\partial z}(A) \end{vmatrix} \neq 0. \end{cases}$$

Alors il existe un voisinage ouvert v de a dans $\mathbb{R}$ et des voisinages ouverts w_1, w_2 de b, c respectivement dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} v \times w_1 \times w_2 \subset U, \\ \text{Il existe un couple unique d'applications } \varphi : v \longrightarrow w_1, \psi : v \longrightarrow w_2 \text{ tel que :} \\ \forall x \in v, \quad f(x, \varphi(x), \psi(x)) = g(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0, \\ \varphi, \psi \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } v. \end{cases}$$

De plus, il existe un voisinage v' de a dans $\mathbb{R}$, inclus dans v , tel que, pour tout $x \in v'$:

$$\begin{pmatrix} \varphi'(x) \\ \psi'(x) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \frac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \frac{\partial g}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) \end{pmatrix}.$$

Ce résultat se traduit géométriquement : sous les hypothèses indiquées, la courbe d'équations

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

admet une représentation paramétrique de classe C^1 ,

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases} ,$$

au voisinage de A .