

Calcul différentiel avancé

Filière Licence Mathématiques et Modélisation
Numérique
Deuxième Année

Dr Mohamed A. SANA
UNIVERSITÉ VIRTUELLE DE COTE D'IVOIRE

2026-2027

Table des matières

1	Compléments de calcul différentiel en dimension finie	1
1.2	Fonctions différentiables, différentielles et matrice jacobienne	1
1.2.1	Fonctions différentiables	1
1.2.2	Différentielle d'une application de classe C^1	2
1.2.3	Différentielle et dérivées partielles	2
1.2.4	Matrice jacobienne	3
1.2.5	Différentielle de fonctions composées	4

Chapitre 1

Compléments de calcul différentiel en dimension finie

1.2 Fonctions différentiables, différentielles et matrice jacobienne

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^p$.

1.2.1 Fonctions différentiables

Définition 1.1. Soient U un ouvert de E , $a \in U$, et $f : U \longrightarrow F$. On dit que f est **différentiable en a** si et seulement s'il existe $L_a \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, en notant $U_0 = \{h \in E \mid a + h \in U\}$:

$$\forall h \in U_0, \quad f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

On dit que f est **différentiable sur U** si et seulement si f est différentiable en tout point a de U .

Rappelons que $\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Remarque. La définition précédente se généralise aisément au cas où E ou F n'est pas de dimension finie, en remplaçant $\mathcal{L}(E, F)$ par $\mathcal{L}_c(E, F)$, ensemble des applications linéaires continues de E dans F (cf. Tome 3, 1.2.6 p. 48 et Tome 4, ex. 8.1.10 et 8.1.11 p. 177).

Proposition 1.1 (Proposition-Définition 1). *Avec les notations de la Définition précédente, si f est différentiable en a , alors L_a est unique. L'application L_a est appelée la **différentielle** de f en a (ou : application linéaire tangente en a à f) et notée $d_a f$.*

Démonstration. Supposons que deux applications linéaires L_a, M_a conviennent. On a alors :

$$\begin{cases} f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|), \\ f(a + h) = f(a) + M_a(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|). \end{cases}$$

En soustrayant, on obtient :

$$(L_a - M_a)(h) = o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

Soit $v \in E \setminus \{0\}$. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a, par linéarité :

$$t(L_a - M_a)(v) = (L_a - M_a)(tv) = o(|t|).$$

D'où :

$$(L_a - M_a)(v) = \frac{o(|t|)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi :

$$(L_a - M_a)(v) = 0.$$

Comme ceci est vrai pour tout $v \in E \setminus \{0\}$ (et trivialement pour $v = 0$), on a $L_a - M_a = 0$, donc $L_a = M_a$.

L'unicité étant établie, si f est différentiable en a , on a :

$$f(a + h) = f(a) + (d_a f)(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

□

1.2.2 Différentielle d'une application de classe C^1

Définition 1.2. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$, et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur U . On appelle **différentielle de f en a** (ou : application linéaire tangente à f en a) l'application linéaire notée $d_a f$ définie par :

$$\begin{aligned} d_a f : \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ h = (h_1, \dots, h_p) &\longmapsto \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \end{aligned}$$

Cette définition généralise celle du Tome 2, 13.3.2 p. 171.

Proposition 1.2. Toute application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^p$ et :

$$\forall a \in \mathbb{R}^p, \quad d_a \varphi = \varphi.$$

Démonstration. Notons $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, et soit $a \in \mathbb{R}^p$. Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{t}(\varphi(a + te_j) - \varphi(a)) = \varphi(e_j),$$

par linéarité de φ . Donc φ admet des dérivées partielles premières en a et :

$$D_j \varphi(a) = \varphi(e_j).$$

D'où, pour tout $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$:

$$(d_a \varphi)(h) = \sum_{j=1}^p h_j D_j \varphi(a) = \sum_{j=1}^p h_j \varphi(e_j) = \varphi\left(\sum_{j=1}^p h_j e_j\right) = \varphi(h).$$

Ainsi, $d_a \varphi = \varphi$. □

Remarque. Les remarques sur les notations formulées dans le Tome 2, p. 172 sont ici aussi valables.

Pour $j \in \{1, \dots, p\}$, la j -ième projection

$$\text{pr}_j : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_p) \longmapsto x_j$$

est notée abusivement x_j . D'où :

$$d_a \text{pr}_j = d_a x_j : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (h_1, \dots, h_p) \longmapsto h_j.$$

Comme la différentielle $d_a x_j$ ne dépend pas de a , on la note dx_j .

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 sur U , on a alors :

$$\forall a \in U, \quad d_a f = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j.$$

1.2.3 Différentielle et dérivées partielles

Théorème 1.1. Soient U un ouvert de E , $a \in U$, et $f : U \rightarrow F$. Si f est différentiable en a , alors, pour tout $v \in E \setminus \{0\}$, f admet une dérivée en a suivant v .

Démonstration. Puisque f est différentiable en a :

$$f(a + h) = f(a) + (d_a f)(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + tv \in U$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(f(a + tv) - f(a)) &= \frac{1}{t}((d_a f)(tv) + o(|t|)) \\ &= (d_a f)(v) + o(1) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (d_a f)(v). \end{aligned}$$

Donc f admet une dérivée en a suivant v , et :

$$(D_v f)(a) = (d_a f)(v).$$

□

Corollaire 1.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$, et $f : U \longrightarrow F$. Si f est différentiable en a , alors f admet des dérivées partielles premières en a , et :

$$\forall (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad (d_a f)(h_1, \dots, h_p) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Démonstration. D'après le Théorème 2, f admet des dérivées partielles premières en a et :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = (d_a f)(e_j),$$

où $(e_1, \dots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

On en déduit, par linéarité de $d_a f$:

$$\forall (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad (d_a f)(h_1, \dots, h_p) = \sum_{j=1}^p h_j (d_a f)(e_j) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

□

Remarque. Il se peut qu'une application $f : U \longrightarrow F$ admette des dérivées partielles premières en a sans être différentiable en a .

Par exemple, l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy \neq 0, \\ 1 & \text{si } xy = 0, \end{cases}$$

admet des dérivées partielles premières en $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

(car $f(\cdot, 0) = 1$ et $f(0, \cdot) = 1$), mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$ car f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Voir aussi l'exercice 8.1.9 p. 177.

Théorème 1.2. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$, et $f : U \longrightarrow F$. Si :

$$\begin{cases} f \text{ admet des dérivées partielles premières sur } U, \\ \text{les dérivées partielles premières de } f \text{ sont continues en } a, \end{cases}$$

alors f est différentiable en a .

Démonstration. C'est essentiellement la même démonstration que pour la Proposition 8.1.2 p. 167. □

Remarque. On peut résumer les trois théorèmes précédents, pour $f : U \longrightarrow F$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $a \in U$:

$$\boxed{\text{différentiable en } a \implies \begin{cases} \text{dérivées directionnelles en } a, \\ \text{dérivées partielles premières en } a, \end{cases}}$$

et

$$\boxed{\begin{cases} \text{dpp sur } U, \\ \text{dpp continues en } a \end{cases} \implies \text{différentiable en } a.}$$

où dpp est l'abréviation de : dérivée partielle première.

Le lecteur se convaincra aisément à l'aide d'exemples que les réciproques de ces implications sont fausses.

1.2.4 Matrice jacobienne

Définition 1.3. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$, et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur U . On appelle **matrice jacobienne** de f en a , et on note $J_f(a)$, la matrice de $d_a f$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.

Notons $f_1, \dots, f_n$ les fonctions composantes de f :

$$\forall x \in U, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

On a alors :

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Définition 1.4. Avec les hypothèses et notations de la Définition précédente, et si $n = p$, on appelle (**déterminant**) **jacobien** de f en a le déterminant de la matrice jacobienne de f en a .

1.2.5 Différentielle de fonctions composées

Théorème 1.3 (Composition des applications de classe C^1). Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, U (resp. V) un ouvert de $\mathbb{R}^q$ (resp. $\mathbb{R}^p$), $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telles que $f(U) \subset V$.

Si f est de classe C^1 sur U et si g est de classe C^1 sur V , alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur U et :

$$\forall a \in U, \quad \begin{cases} d_a(g \circ f) = (d_{f(a)}g) \circ (d_af), \\ J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a). \end{cases}$$

On a noté ici abusivement $g \circ f$ l'application :

$$g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto g(f(x)).$$

Démonstration. Soit $a \in U$. Notons :

$$U_0 = \{h \in \mathbb{R}^q \mid a + h \in U\}, \quad V_0 = \{k \in \mathbb{R}^p \mid f(a) + k \in V\}.$$

Puisque f est de classe C^1 sur U , d'après la Proposition 8.1.2 p. 167, il existe $\varepsilon_1 : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que :

$$\begin{cases} \forall h \in U_0, \quad f(a + h) = f(a) + (d_af)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h), \\ \varepsilon_1(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{cases}$$

De même, puisque g est de classe C^1 sur V , il existe $\varepsilon_2 : V_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\begin{cases} \forall k \in V_0, \quad g(f(a) + k) = g(f(a)) + (d_{f(a)}g)(k) + \|k\| \varepsilon_2(k), \\ \varepsilon_2(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0. \end{cases}$$

Pour tout $h \in U_0$, on a :

$$(d_af)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h) = f(a + h) - f(a) \in V_0.$$

On en déduit, en utilisant la linéarité de $d_{f(a)}g$:

$$\begin{aligned} \forall h \in U_0, \quad g(f(a + h)) &= g\left(f(a) + ((d_af)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h))\right) \\ &= g(f(a)) + (d_{f(a)}g \circ d_af)(h) + \alpha(h), \end{aligned}$$

où

$$\alpha(h) = \|h\| (d_{f(a)}g)(\varepsilon_1(h)) + \|(d_af)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)\| \varepsilon_2((d_af)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)).$$

Notons $L = d_{f(a)}g \circ d_af$; L est linéaire.

Puisque $d_af \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ et $d_{f(a)}g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, il existe $(A, B) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que :

$$\begin{cases} \forall h \in \mathbb{R}^q, \quad \|(d_af)(h)\| \leq A\|h\|, \\ \forall k \in \mathbb{R}^p, \quad \|(d_{f(a)}g)(k)\| \leq B\|k\| \end{cases}$$

(cf. Tome 3, 1.2.6 Th. p. 48).

On a alors :

$$\begin{cases} \|(d_{f(a)}g)(\varepsilon_1(h))\| \leq B\|\varepsilon_1(h)\|, \\ \|(d_af)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)\| \leq \|h\| (A + \|\varepsilon_1(h)\|). \end{cases}$$

D'autre part, par composition d'applications continues :

$$\varepsilon_2((d_a f)(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Ceci montre que α est de la forme $\alpha(h) = \|h\| \varepsilon(h)$ où $\varepsilon : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} (g \circ f)(a + h) = (g \circ f)(a) + L(h) + \|h\| \varepsilon(h), \\ \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{cases}$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, on a alors :

$$\frac{1}{t}((g \circ f)(a + te_j) - (g \circ f)(a)) = L(e_j) + \frac{|t|}{t} \|e_j\| \varepsilon(te_j) \xrightarrow{t \rightarrow 0} L(e_j).$$

Ceci montre que $g \circ f$ admet des dérivées partielles premières en tout point a de U , et :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad (D_j(g \circ f))(a) = L(e_j).$$

Notons $f_1, \dots, f_p$ les fonctions composantes de f , $g_1, \dots, g_n$ celles de g , et $(g \circ f)_1, \dots, (g \circ f)_n$ celles de $g \circ f$. On a, pour tout $j \in \{1, \dots, q\}$, et en notant de la même façon les bases canoniques de $\mathbb{R}^q$, $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} L(e_j) &= (d_{f(a)} g \circ d_a f)(e_j) \\ &= (d_{f(a)} g) \left(\sum_{k=1}^p D_j f_k(a) e_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^p D_j f_k(a) (d_{f(a)} g)(e_k) \\ &= \sum_{k=1}^p D_j f_k(a) \left(\sum_{i=1}^n D_k g_i(f(a)) e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^p D_k g_i(f(a)) D_j f_k(a) \right) e_i. \end{aligned}$$

Comme, d'autre part :

$$L(e_j) = \sum_{i=1}^n D_j (g \circ f)_i(a) e_i,$$

on déduit :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, q\}, \quad D_j (g \circ f)_i(a) = \sum_{k=1}^p D_k g_i(f(a)) D_j f_k(a).$$

Le résultat précédent montre que les dérivées partielles premières de $g \circ f$ s'expriment comme sommes de produits et composées de f et des dérivées partielles premières de f et g ; il en résulte que les dérivées partielles premières de $g \circ f$ sont continues sur U , et donc $g \circ f$ est de classe C^1 sur U .

En passant aux matrices dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$, on obtient :

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a),$$

et donc :

$$d_a(g \circ f) = (d_{f(a)} g) \circ (d_a f).$$

□

Exemple. Soient $f : (x, y, z) \mapsto (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) \in \mathbb{R}^2$ et $g : (u, v) \mapsto g(u, v) \in \mathbb{R}$, de classe C^1 sur des ouverts convenables. Alors $g \circ f$ est de classe C^1 et, en notant $M = (x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(M), \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(M), \frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(M) \right) &= J_{g \circ f}(M) \\ &= J_g(f_1(M), f_2(M)) \cdot J_f(M) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial u}(f_1(M), f_2(M)) \quad \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(M), f_2(M)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(M) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(M) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(M) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(M) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(M) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(M) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où, par exemple :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(M) = \frac{\partial g}{\partial u}(f_1(M), f_2(M)) \frac{\partial f_1}{\partial x}(M) + \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(M), f_2(M)) \frac{\partial f_2}{\partial x}(M).$$

Pour alléger les écritures, souvent on n'écrit pas le point « en lequel on se place », et on confond u (place ou variable), f_1 (fonction), $f_1(x, y, z)$ (réel), pour obtenir :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$