

Calcul différentiel avancé

Filière Licence Mathématiques et Modélisation
Numérique
Deuxième Année

Dr Mohamed A. SANA
UNIVERSITÉ VIRTUELLE DE COTE D'IVOIRE

2026-2027

Table des matières

1	Compléments de calcul différentiel en dimension finie	1
1.2	Fonctions de classe C^1	1
1.2.1	C^1 -difféomorphisme	2
1.2.2	Inégalité des accroissements finis	2
1.2.3	Fonction lipschitzienne	3
1.2.4	Résolution d'EDP d'ordre 1 (Hors programme)	3

Chapitre 1

Compléments de calcul différentiel en dimension finie

1.3 Fonctions de classe C^1

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^p$.

Définition 1.1 (Fonction de classe C^1). Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \longrightarrow F$. On dit que f est de classe C^1 sur U si et seulement si :

1. f admet des dérivées partielles premières par rapport à chaque variable en tout point de U ,
2. les applications $D_1 f, \dots, D_p f$ sont continues sur U .

Plus généralement, soient U un ouvert de E et $f : U \longrightarrow F$. S'il existe une base $B = (e_1, \dots, e_p)$ de E telle que :

- pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$ et pour tout $a \in U$, f admet une dérivée première en a suivant e_j , notée $D_{e_j} f(a)$,
- pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, l'application $D_{e_j} f$ est continue sur U ,

on montre qu'il en est alors de même pour toute base B' de E , et l'on dit que f est de classe C^1 sur U .

Proposition 1.1 (Développement limité à l'ordre 1). Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur U , et $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$. Notons

$$U_0 = \{h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p \mid a + h = (a_1 + h_1, \dots, a_p + h_p) \in U\}.$$

Il existe une application $\varepsilon : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\begin{cases} \forall h \in U_0, & f(a + h) = f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \|h\| \varepsilon(h), \\ \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{cases}$$

On dit alors que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a (en abrégé : $DL_1(a)$).

Remarque. La condition $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ exprime que le reste $\|h\|\varepsilon(h)$ est négligeable devant $\|h\|$ lorsque h tend vers 0. On parle parfois d'« approximation affine tangente ».

Exemple. Dans le cas particulier $p = 1$, si $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est C^1 , la proposition redonne la formule bien connue :

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + o(h).$$

Démonstration. D'après le Tome 2, 13.2.2 Proposition p.170, chaque fonction composante f_i de f ($1 \leq i \leq n$) admet un $DL_1(a)$:

$$\begin{cases} f_i(a + h) = f_i(a) + \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) + \|h\| \varepsilon_i(h) \\ \varepsilon_i(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{cases}$$

d'où le résultat, en notant $\varepsilon : h \longmapsto (\varepsilon_1(h), \dots, \varepsilon_n(h))$. □

La conclusion de la Proposition précédente peut s'écrire sous la forme compacte :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|),$$

où $o_{h \rightarrow 0}(\|h\|)$ désigne un reste négligeable devant $\|h\|$ lorsque h tend vers 0.

1.3.1 C^1 -difféomorphisme

Définition 1.2. Soient U (resp. V) un ouvert de E (resp. F), $\phi : U \rightarrow V$.

On dit que ϕ est un C^1 -difféomorphisme (de U sur V) si et seulement si :

$$\begin{cases} \phi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } U \\ \phi \text{ est bijective} \\ \phi^{-1} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } V \end{cases}$$

Exemple. Soient U un ouvert de E , $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective, alors

$$\begin{aligned} \phi : U &\longrightarrow \varphi(U) \\ x &\longmapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

est un C^1 -difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$.

Par exemple,

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x+y, x-y) \end{aligned}$$

est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. 1. Pour tout ouvert U de E , id_U est un C^1 -difféomorphisme de U sur U .

- Si $\phi : U \rightarrow V$ est un C^1 -difféomorphisme et si $\psi : V \rightarrow W$ est un C^1 -difféomorphisme, alors $\psi \circ \phi$ est un C^1 -difféomorphisme.
- Si $\phi : U \rightarrow V$ est un C^1 -difféomorphisme de U sur V , alors $\phi^{-1} : V \rightarrow U$ est un C^1 -difféomorphisme de V sur U .

Il en résulte que l'ensemble des C^1 -difféomorphismes de U sur lui-même est un groupe pour la loi de composition.

2. Il se peut que, deux ouverts U, V étant donnés, il n'existe pas de C^1 -difféomorphisme de U sur V ; par exemple, si U est connexe et si V ne l'est pas, alors il n'existe aucun homéomorphisme de U sur V (cf. Tome 3, 1.5.1 Prop. 4 p. 71), donc *a fortiori* aucun C^1 -difféomorphisme de U sur V .

1.3.2 Inégalité des accroissements finis

Théorème 1.1 (Inégalité des accroissements finis). Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $(a, b) \in U^2$ tel que $[a; b] \subset U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U , et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in [a; b], \quad \sum_{j=1}^p \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq M.$$

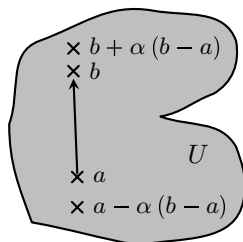
On a alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq M \|b - a\|_\infty,$$

où

$$\|b - a\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq p} |b_j - a_j|, \quad a = (a_1, \dots, a_p), \quad b = (b_1, \dots, b_p).$$

Démonstration.



Puisque $[a; b] \subset U$ et que U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, il existe $\alpha \in]0; +\infty[$ tel que :

$$\forall t \in]-\alpha; 1 + \alpha[, \quad a + t(b - a) \in U.$$

L'application $\varphi :]-\alpha; 1 + \alpha[\longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 , par composition d'applications de classe C^1 (cf. Th. p. 169). D'après le théorème des accroissements finis (Tome 1, 6.2.2 p. 165) ou l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une variable réelle (Tome 3, 2.3.7 Th. 1 p. 133), on a :

$$|f(b) - f(a)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| \leq \sup_{t \in [0;1]} |\varphi'(t)|.$$

Et, en notant $h = (b - a) = (h_1, \dots, h_p)$:

$$\forall t \in [0;1], \quad \varphi'(t) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + th).$$

D'où :

$$\sup_{t \in [0;1]} |\varphi'(t)| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq p} |h_j| \right) \sum_{j=1}^p \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + th) \right| \leq \|h\|_{\infty} M.$$

Remarque. 1. L'existence de M est assurée (lorsque f est de classe C^1 sur U) quitte à remplacer U par un ouvert borné V tel que $[a; b] \subset V \subset \bar{V} \subset U$, puisque les dérivées partielles premières de f sont continues sur le fermé borné $\bar{V}$ de $\mathbb{R}^p$ (cf. Tome 3, 1.3.2 Prop. 3 p. 53 et 1.3.4 Th. 2 p. 59).

2. On peut remplacer simultanément $\|\cdot\|_{\infty}$ sur $\mathbb{R}^p$ et la condition de majoration des dpp. par $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^p$ et la condition :

$$\forall x \in [a; b], \quad \max_{1 \leq j \leq p} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq M.$$

□

Rappelons Une partie C d'un $\mathbb{R}$ -ev est dite convexe si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in C^2, \quad [x; y] \subset C.$$

1.3.3 Fonction lipschitzienne

Définition 1.3. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ -evn, d_E (resp. d_F) la distance associée à $\|\cdot\|_E$ (resp. $\|\cdot\|_F$). Soient $X \in \mathfrak{P}(E)$, $f : X \longrightarrow F$ une application.

1) Soit $k \in \mathbb{R}_+$; on dit que f est k -lipschitzienne si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in X^2, \quad d_F(f(x_1), f(x_2)) \leq k d_E(x_1, x_2).$$

2) On dit que f est lipschitzienne si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit k -lipschitzienne.

Une application $f : X \longrightarrow X$ est dite contractante si et seulement s'il existe $k \in [0; 1[$ tel que f soit k -lipschitzienne.

1.3.4 Résolution d'EDP d'ordre 1 (Hors programme)

Exemple (Résolution de $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur un ouvert convexe). Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$. On veut déterminer toutes les applications $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U telles que :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0.$$

Soit f convenant. Notons J la seconde projection de U , c'est-à-dire :

$$J = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}, (x, y) \in U\}.$$

Puisque U est ouvert, J est ouvert.

Soit $y \in J$. Puisque U est convexe, l'ensemble

$$I_y = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in U\}$$

est un intervalle.

On a :

$$\forall x \in I_y, \quad (f(\cdot, y))'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0.$$

Il existe donc un réel unique, noté $A(y)$, tel que :

$$\forall x \in I_y, \quad f(x, y) = A(y).$$

Ainsi :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = A(y).$$

Régularité de A sur J . Il reste enfin à montrer que A est de classe C^1 sur J .

Dans le cas où J est borné, $J =]\alpha; \beta[$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Il existe $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_1, \alpha) \in \overline{U}$ et $(x_2, \beta) \in \overline{U}$; notons

$$\xi : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

l'application qui, à $y \in J$, associe le réel $\xi(y)$ tel que $(\xi(y), y)$ soit sur le segment joignant (x_1, α) et (x_2, β) . Il est alors clair que ξ est de classe C^1 . Comme

$$\forall y \in J, \quad A(y) = f(\xi(y), y),$$

on en déduit que A est de classe C^1 sur J .

Le lecteur adaptera le raisonnement précédent au cas où J n'est pas borné.

Réciproque et résumé. Réciproquement, il est évident que, pour toute application $A : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur J , l'application

$$f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & A(y) \end{array}$$

est de classe C^1 sur U et vérifie l'EDP : $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

En résumé : si U est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$, les solutions $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 de l'EDP $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sont exactement les applications définies par

$$f(x, y) = A(y),$$

où $A : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et J est la deuxième projection de U . On dispose bien sûr d'un résultat analogue pour l'EDP1 $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, et de résultats similaires dans le cas de plusieurs (≥ 3) variables. Si l'ouvert U n'est pas convexe, le résultat précédent peut tomber en défaut, comme le montre l'exemple suivant.

Considérons $U = \mathbb{R}^2 - (\{0\} \times \mathbb{R}_+)$.

et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ -y^2 & \text{si } (x > 0 \text{ et } y \geq 0) \\ y^2 & \text{si } (x < 0 \text{ et } y \geq 0) \end{cases}$$

Il est clair que f est de classe C^1 sur l'ouvert (étoilé) U et vérifie :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0.$$

Cependant, il n'existe pas d'application $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x, y) \in U, f(x, y) = A(y).$$

puisque, par exemple.

$$f(1, 1) \neq f(-1, 1).$$

Exemple (Résolution de $\frac{\partial f}{\partial x} = g$ sur un pavé ouvert). Soient I, J deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$, $U = I \times J$, $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On veut déterminer les applications $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U telles que :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y).$$

- Soit f convenant. Pour tout y de J , on a : $\forall x \in I, (f(\cdot, y))'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y)$. d'où :

$$\forall x \in I, \quad (f(\cdot, y))(x) = f(\cdot, y)(x_0) + \int_{x_0}^x (f(\cdot, y))'(t) dt = f(x_0, y) + \int_{x_0}^x g(t, y) dt,$$

où $x_0 \in I$ est fixé quelconque. Donc f est de la forme $f : (x, y) \longmapsto A(y) + \int_{x_0}^x g(t, y) dt$, où $x_0 \in I$ et $A : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur J .

- Réciproquement, pour tout x_0 de I et toute application $A : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur J , l'application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = A(y) + \int_{x_0}^x g(t, y) dt$ est de classe C^1 sur U et :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y),$$

en utilisant l'étude des intégrales fonctions de la borne d'en haut (cf. Tome 1, 7.4.1 Cor. 1 p. 211) et le théorème de dérivation sous le signe $\int$ (cf. Tome 3, 2.3.11 2) Th. p. 141). Ainsi, la solution générale de l'EDP1 $\frac{\partial f}{\partial x} = g$ (f inconnue, g donnée) est obtenue en «primitivant» g par rapport à x et en rajoutant une fonction quelconque de classe C^1 de la variable y . Le résultat se généralise aisément au cas de plusieurs (≥ 3) variables.

- **Application** : La solution générale de l'EDP1 $\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , est l'inconnue) est $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, où $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est quelconque

$$(x, y) \mapsto \frac{x^3}{3} + xy^2 + A(y)$$

de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exemple (Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, telles que :).

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y.$$

en utilisant le changement de variables : $X = x$, $Y = x + 2y$. L'application $\phi : (x, y) \mapsto (x, x + 2y)$ est clairement un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (voir aussi 8.1.6 Exemple p. 181). Notons, pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F = f \circ \phi^{-1}$; on a ainsi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = F(x, x + 2y).$$

ou encore : $(x, y) \xrightarrow{\phi} (x, x + 2y) \xrightarrow{F} F(x, x + 2y) = f(x, y)$. De plus, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. D'après 8.1.3 2) Th. p. 169, on a, avec des notations abusives classiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial Y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} = 2\frac{\partial F}{\partial Y} \end{cases}.$$

On en déduit que f est solution sur $\mathbb{R}^2$ de $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y$ si et seulement si F est solution sur $\mathbb{R}^2$ de : $2\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{1}{2}X^2(Y - X)$. D'après 1), la solution générale pour F est donnée par : $F(X, Y) = -\frac{1}{16}X^4 + \frac{1}{12}X^3Y + A(Y)$, où $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est quelconque de classe C^1 . La solution générale de l'EDP1 proposée est donc :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{16}x^3y + A(x + 2y).$$

où $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est quelconque de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Remarque : En notant $\phi : (x, y) \mapsto (X, Y)$ le changement de variables proposé, f la fonction inconnue et $F = f \circ \phi^{-1}$, on aura le plus souvent besoin de remplacer, dans l'EDP1 de l'énoncé, les dpp de f en fonction de celles de F , et on utilisera donc les formules relatives aux dpp d'une fonction composée sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} \end{cases}$$