

Calcul différentiel avancé

Filière Licence Mathématiques et Modélisation
Numérique
Deuxième Année

Dr Mohamed A. SANA
UNIVERSITÉ VIRTUELLE DE COTE D'IVOIRE

2026-2027

Table des matières

3	Intégrales doubles-Techniques de calcul	1
3.3	Techniques de calcul	1
3.3.1	Propriétés élémentaires de l'intégrale double	1
3.3.2	Théorème de Fubini	2
3.3.3	Changement de variables dans une intégrale double	4
3.3.4	Changement de variables dans une intégrale triple	6
3.4	Formule de Green-Riemann	8

Chapitre 3

Intégrales doubles-Techniques de calcul

3.3 Techniques de calcul

3.3.1 Propriétés élémentaires de l'intégrale double

Proposition 3.1 (Proposition 1). *Si D est quarrable, alors*

$$\iint_D 1 = \mathcal{A}(D).$$

Proposition 3.2 (Proposition 2). *Soient D une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ et $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une application bornée ; pour que $\iint_D f$ existe, il faut et il suffit que $\iint_D f$ existe ou que $\iint_{\overline{D}} f$ existe, et on a dans ce cas :*

$$\iint_{\overline{D}} f = \iint_D f = \iint_D f.$$

La Prop. 2 montre qu'on peut, en pratique, se ramener au cas où D est fermée ou ouverte.

Proposition 3.3 (Proposition 3 (Linéarité de l'intégrale double)). *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ sont intégrables sur la partie quarrable D , alors $\lambda f + g$ est intégrable sur D et :*

$$\iint_D (\lambda f + g) = \lambda \iint_D f + \iint_D g.$$

Proposition 3.4 (Proposition 4). *Soient D_1, D_2 deux parties quarrables de $\mathbb{R}^2$, $f : D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $f|_{D_1}$ et $f|_{D_2}$ soient intégrables sur D_1 et D_2 respectivement. Alors f est intégrable sur $D_1 \cup D_2$ et :*

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f - \iint_{D_1 \cap D_2} f.$$

On appliquera souvent la Prop. 4 au cas où $\mathcal{A}(D_1 \cap D_2) = 0$ (auquel cas on a $\iint_{D_1 \cap D_2} f = 0$).

Proposition 3.5 (Proposition 5). *Soient D_1, D_2 deux parties quarrables de $\mathbb{R}^2$ telles que $D_1 \subset D_2$, et $f : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application intégrable sur D_2 . Alors $f|_{D_1}$ est intégrable sur D_1 .*

Proposition 3.6 (Proposition 6 (Positivité et croissance de l'intégrale double)). *Soient D, D_1, D_2 des parties quarrables de $\mathbb{R}^2$.*

- 1) *Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur D et si $f \geq 0$, alors $\iint_D f \geq 0$.*
- 2) *Si $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ sont intégrables sur D et si $f \leq g$, alors $\iint_D f \leq \iint_D g$.*
- 3) *Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur D , alors*

$$\mathcal{A}(D) \inf(f) \leq \iint_D f \leq \mathcal{A}(D) \sup(f).$$

- 4) *Si $D_1 \subset D_2$, $f : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur D_2 et $f \geq 0$, alors*

$$\iint_{D_1} f \leq \iint_{D_2} f.$$

5) Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur D , alors $|f|$ est intégrable sur D et :

$$\left| \iint_D f \right| \leq \iint_D |f|.$$

Proposition 3.7 (Proposition 7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales doubles)). Si $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sont intégrables sur la partie quarrable D , alors fg, f^2, g^2 sont intégrables sur D et :

$$\left(\iint_D fg \right)^2 \leq \left(\iint_D f^2 \right) \left(\iint_D g^2 \right).$$

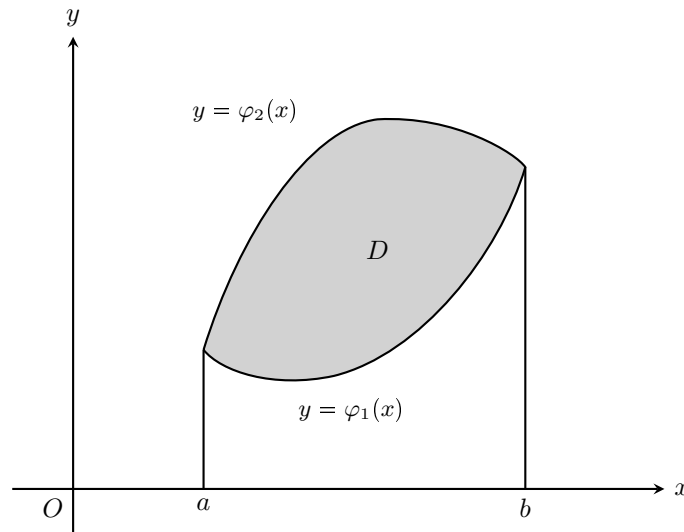
3.3.2 Théorème de Fubini

Théorème 3.1 (Théorème de Fubini). Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$

- $\varphi_1, \varphi_2 : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux et telles que $\varphi_1 \leq \varphi_2$
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq x \leq b \text{ et } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$
- $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors

- D est quarrable
- f est intégrable sur D
- $\iint_D f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$



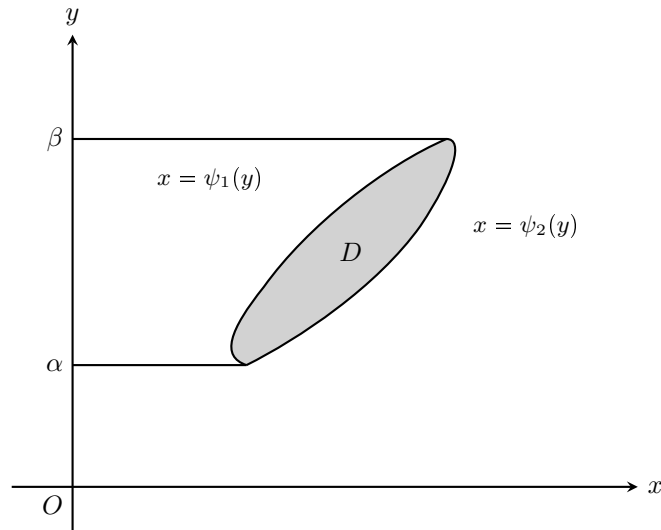
Remarque. 1) Toute partie convexe, fermée et bornée D de $\mathbb{R}^2$ est de la forme précédente.

- 2) Le théorème de Fubini montre qu'une intégrale double (sur un domaine du type indiqué) se ramène à deux intégrales simples emboîtées.
- 3) En échangeant les rôles des coordonnées, on voit que, si

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \alpha \leq y \leq \beta \text{ et } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

(où $\psi_1, \psi_2 : [\alpha; \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et telles que $\psi_1 \leq \psi_2$), alors (D est quarrable, f est intégrable sur D et) :

$$\iint_D f = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$



Cette possibilité d'interversion des coordonnées par le théorème de Fubini permet d'obtenir certaines égalités faisant intervenir des intégrales simples.

Corollaire 3.1 (Corollaire 1 (Un cas particulier du théorème de Fubini)). Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a \leq b$ et $c \leq d$

- $D = [a; b] \times [c; d]$
- $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors f est intégrable sur D et :

$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Corollaire 3.2 (Corollaire 2 (Un cas particulier du Corollaire 1)). Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a \leq b$ et $c \leq d$

- $D = [a; b] \times [c; d]$
- $u : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue
- $v : [c; d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors l'application

$$f : \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto u(x)v(y) \end{array}$$

(quelquefois notée $u \otimes v$) est intégrable sur D et :

$$\iint_D u(x)v(y) dx dy = \left(\int_a^b u(x) dx \right) \left(\int_c^d v(y) dy \right).$$

Remarque. Le cas précédent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{le « domaine d'intégration » est un pavé} \\ \text{et} \\ \text{la fonction à intégrer est « produit d'une fonction de } x \text{ et d'une fonction de } y \end{array} \right.$$

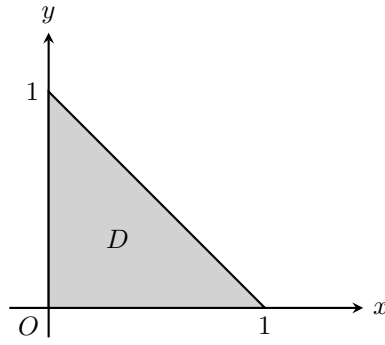
est très fréquent en pratique; on s'y ramène par exemple en passant en coordonnées polaires dans certains cas (cf. 13.2.5 2) exemples p. 251).

Exemples : Calculer $I = \iint_D f$ où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

et $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Résolution. Par le théorème de Fubini (forme adaptée au domaine D), on a :



D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 \right) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{12}(1-x)^4 \right]_0^1 = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{1-3x+3x^2-x^3}{3} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 \right) dx \\
 &= \left[\frac{x}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{3} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{I = \frac{1}{6}}.$

3.3.3 Changement de variables dans une intégrale double

Théorème 3.2 (Changement de variables). *Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, $\Phi : U \longrightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme, Δ une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ incluse dans U , $f : \Phi(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors :*

– $\Phi(\Delta)$ est quarrable ;

–

$$\iint_{\Phi(\Delta)} f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\Phi(u, v)) |\det(J_{\Phi}(u, v))| du dv.$$

Les cas les plus fréquents en pratique sont les suivants :

Changement de variables affine

$$\begin{cases} x = a u + b v, \\ y = c u + d v, \end{cases} \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad ad - bc \neq 0.$$

Ici :

$$\det(J_{\Phi}(u, v)) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

on remplacera donc $dx dy$ par $|ad - bc| du dv$.

Autres changements

(coordonnées polaires, etc.)

En particulier, on peut quelquefois utiliser une symétrie simultanée de D et de f pour réduire le calcul de $\iint_D f$.

Exemple (Symétrie). Calculer $I = \iint_D f$, où $D = [-1; 1]^2$ et $f : (x, y) \mapsto x$.

Le domaine d'intégration D est symétrique par rapport à l'axe $(y'y)$ et :

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(-x, y) = -f(x, y).$$

Ceci nous amène à effectuer le changement de variables défini par :

$$x = -X, \quad y = Y.$$

On obtient :

$$I = \iint_D (-X) | -1 | dX dY = -I,$$

d'où $I = 0$.

Passage en coordonnées polaires

Avec les notations usuelles :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$$

d'où, en notant $\Phi : (\theta, \rho) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$:

$$\det(J_{\Phi}(\theta, \rho)) = \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta & \cos \theta \\ \rho \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} = -\rho.$$

Proposition 3.8 (Règle pratique de substitution polaire). *On admettra (les hypothèses du théorème précédent ne sont pas toujours réunies) que, pour calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$ en envisageant l'utilisation des coordonnées polaires, on remplace :*

- D par le domaine des (θ, ρ) correspondant (ne pas hésiter à tracer une figure) ;
- $f(x, y)$ par $f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$;
- $dx dy$ par $|\rho| d\theta d\rho$.

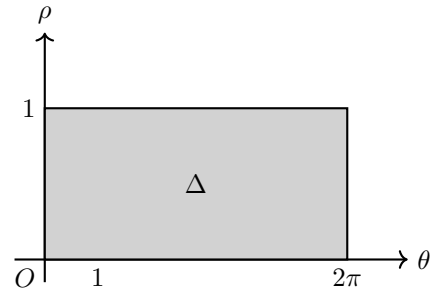
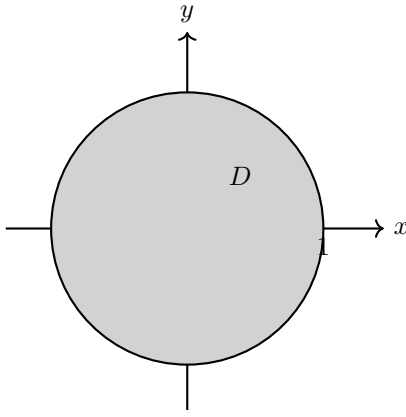
Le plus souvent, ρ sera positif ou nul.

Exemple. 1) Calculer $I = \iint_D f$ où

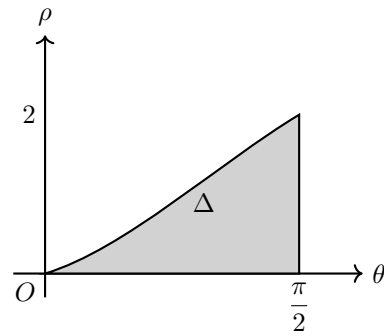
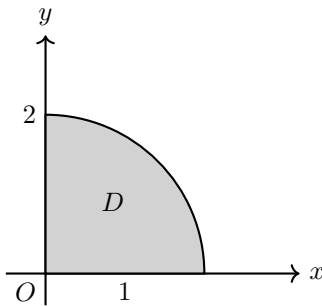
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{et} \quad f : (x, y) \mapsto x^2 y^2.$$

En passant en coordonnées polaires et en notant $\Delta = [0; 2\pi] \times [0; 1]$, on a :

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta} (\rho \cos \theta)^2 (\rho \sin \theta)^2 \rho d\theta d\rho \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho^5 d\rho \right) \\ &= \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{48} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\theta) d\theta \\ &= \frac{\pi}{24}. \end{aligned}$$



- 2) Calculer $I = \iint_D f$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$, $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Pour $\rho > 0$: $x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \iff \rho^2 - 2\rho \sin \theta \leq 0 \iff \rho \leq 2 \sin \theta$.



En notant $\Delta = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2 \sin \theta\}$, on a donc :

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta} \rho^3 \, d\theta \, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \sin \theta} \rho^3 \, d\rho \right) d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta)^2 \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2 \cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta = \frac{3}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

3.3.4 Changement de variables dans une intégrale triple

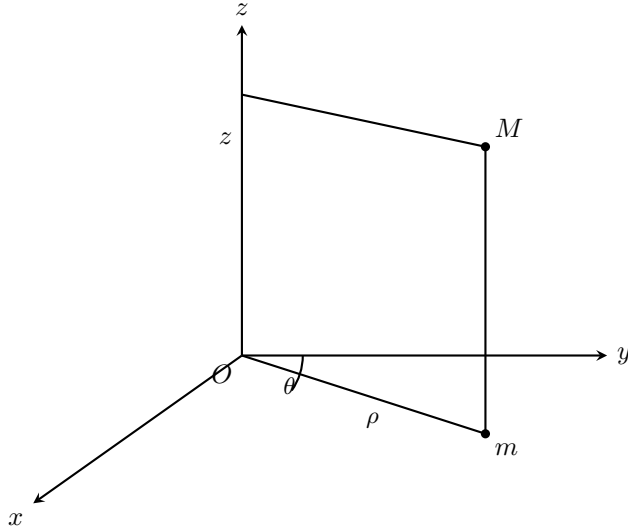
Théorème 3.3 (Changement de variables dans une intégrale triple). Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^3$, $\Phi : U \longrightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme, Δ une partie cubable de $\mathbb{R}^3$ incluse dans U , $f : \Phi(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors :

- $\Phi(\Delta)$ est cubable ;

-

$$\iiint_{\Phi(\Delta)} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Delta} f(\Phi(u, v, w)) \, |\det(J_{\Phi}(u, v, w))| \, du \, dv \, dw.$$

Passage en coordonnées cylindriques



Un point $M(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ est repéré par un système de coordonnées cylindriques (θ, ρ, z) où (θ, ρ) est un système de coordonnées polaires de la projection orthogonale m de M sur le plan xOy . On a ainsi les formules de changement de variables :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z. \end{cases}$$

On admettra que la conclusion du théorème précédent est valable ici, bien que les hypothèses n'en soient pas réunies.

Ici :

$$\det(J_{\Phi}(\theta, \rho, z)) = \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \rho \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho.$$

[A retenir] :

Pour passer en coordonnées cylindriques dans une intégrale triple, on remplace $dx dy dz$ par $|\rho| d\theta d\rho dz$.

Exemple. Calculer $I = \iiint_D f$ où

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z\}, \quad f(x, y, z) = |x^2 - y^2|.$$

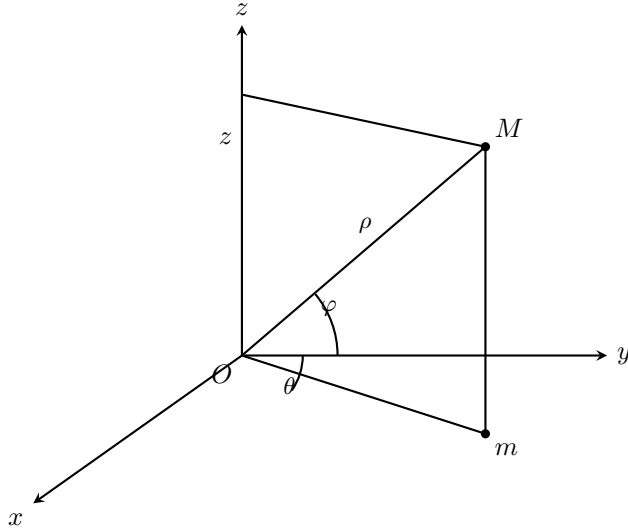
En passant en coordonnées cylindriques :

$$(x, y, z) \in D \iff (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1, \rho^2 \leq z, \rho \geq 0).$$

d'où, en notant $\Delta = \{(\theta, \rho, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq \rho \leq \sqrt{z}\}$:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Delta} |\rho^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)| |\rho| d\theta d\rho dz \\ &= \left(\int_0^{2\pi} |\cos^2 \theta - \sin^2 \theta| d\theta \right) \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{z}} \rho^3 d\rho \right) dz \\ &= \left(\int_0^{2\pi} |\cos 2\theta| d\theta \right) \left(\int_0^1 \frac{z^2}{4} dz \right) \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} |\cos u| du = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Passage en coordonnées sphériques



Un point $M(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ est repéré par un système de coordonnées sphériques (θ, ρ, φ) où $\rho = OM$ et θ est l'angle polaire de la projection orthogonale m de M sur le plan xOy , et où φ est l'angle entre le plan xOy (orienté directement) et $\overrightarrow{OM}$. On impose classiquement :

$$\theta \in [0; 2\pi] \quad (\text{ou } \theta \in [-\pi; \pi]) \quad \text{et} \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

On a ainsi les formules de changement de variables :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ z = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

On admettra que la conclusion du théorème précédent est valable ici, bien que les hypothèses n'en soient pas réunies.

Ici, en notant $\Phi : (\theta, \rho, \varphi) \mapsto (\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$:

$$\begin{aligned} \det(J_\Phi(\theta, \rho, \varphi)) &= \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\rho \cos \theta \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= -\rho^2 (\sin^2 \theta \cos^3 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \cos \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \cos \varphi + \cos^2 \theta \cos^3 \varphi) \\ &= -\rho^2 (\sin^2 \theta \cos \varphi + \cos^2 \theta \cos \varphi) \\ &= -\rho^2 \cos \varphi. \end{aligned}$$

On retiendra :

Pour passer en coordonnées sphériques dans une intégrale triple, on remplace $dx dy dz$ par $\rho^2 |\cos \varphi| d\theta d\rho d\varphi$.

Exemple. Calculer $I = \iiint_D f$ où

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \quad \text{et} \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

En passant en coordonnées sphériques et en notant $\Delta = [0; 2\pi] \times [0; 1] \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Delta} \rho^2 \cdot \rho^2 |\cos \varphi| d\theta d\rho d\varphi \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho^4 d\rho \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos \varphi| d\varphi \right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{4\pi}{5}. \end{aligned}$$