

Calcul différentiel avancé

Filière Licence Mathématiques et Modélisation
Numérique
Deuxième Année

Dr Mohamed A. SANA
UNIVERSITÉ VIRTUELLE DE COTE D'IVOIRE

2026-2027

Table des matières

3	Intégrales doubles-Techniques de calcul	1
3.1	Construction de l'intégrale double	1
3.1.1	Parties quarrables de $\mathbb{R}^2$	1
3.1.2	Définition de l'intégrale double	5

Chapitre 3

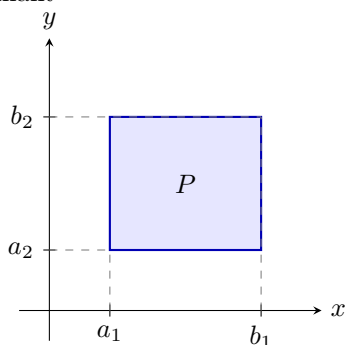
Intégrales doubles-Techniques de calcul

3.1 Construction de l'intégrale double

3.1.1 Parties quarrables de $\mathbb{R}^2$

Pavé

Définition 3.1. On appelle *pavé fermé borné* (de $\mathbb{R}^2$) toute partie P de $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant



$$P = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2].$$

Plus généralement, on appelle *pavé de $\mathbb{R}^2$* tout produit cartésien $I \times J$ où I, J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. L'étude du cas $a_1 = b_1$ ou $a_2 = b_2$ étant généralement évidente, nous supposons, sauf indication contraire, $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$. La donnée d'un pavé fermé borné P détermine de façon unique les réels a_1, b_1, a_2, b_2 .

Définition 3.2. Soit $P = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ un pavé fermé borné.

1. On appelle *aire de P* le réel, noté $\mathcal{A}(P)$, défini par

$$\mathcal{A}(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2).$$

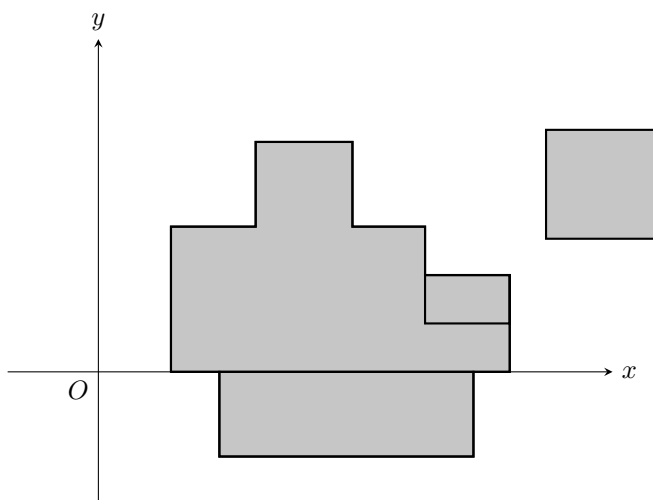
2. On appelle *intérieur de P* , et on note P^0 , la partie

$$P^0 = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$$

de $\mathbb{R}^2$.

Parties pavables

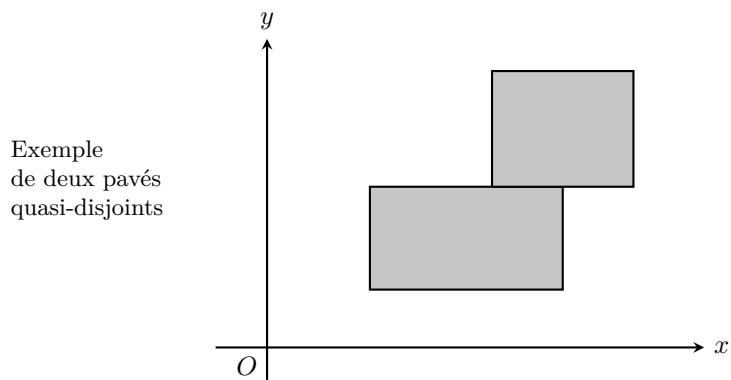
Définition 3.3. On appelle *partie pavable* (de $\mathbb{R}^2$) toute réunion d'un nombre fini de pavés fermés bornés de $\mathbb{R}^2$.


 Exemple de partie pavable de $\mathbb{R}^2$

Remarque.

- 1) $\emptyset$ est pavable.
- 2) Tout pavé fermé borné est une partie pavable.
- 3) Toute partie pavable est fermée bornée dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 3.4. Deux pavés fermés bornés de $\mathbb{R}^2$ sont dits **quasi-disjoints** si et seulement si leurs intérieurs sont disjoints.

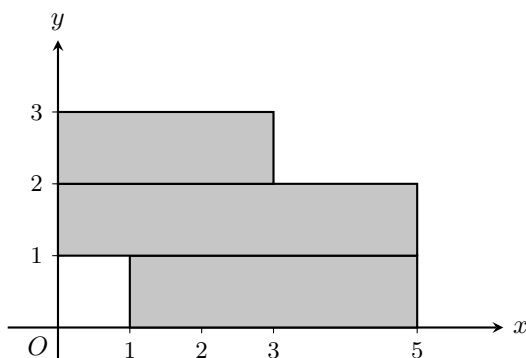

 Exemple
de deux pavés
quasi-disjoints

Proposition 3.1. Toute partie pavable est réunion d'un nombre fini de pavés fermés bornés quasi-disjoints.

Exemple. La partie $B = ([0; 3] \times [1; 3]) \cup ([1; 5] \times [0; 2])$ est pavable (par définition) et peut se décomposer (par exemple) en

$$B = ([1; 5] \times [0; 1]) \cup ([0; 5] \times [1; 2]) \cup ([0; 3] \times [2; 3]),$$

où les trois pavés qui interviennent sont deux à deux quasi-disjoints.

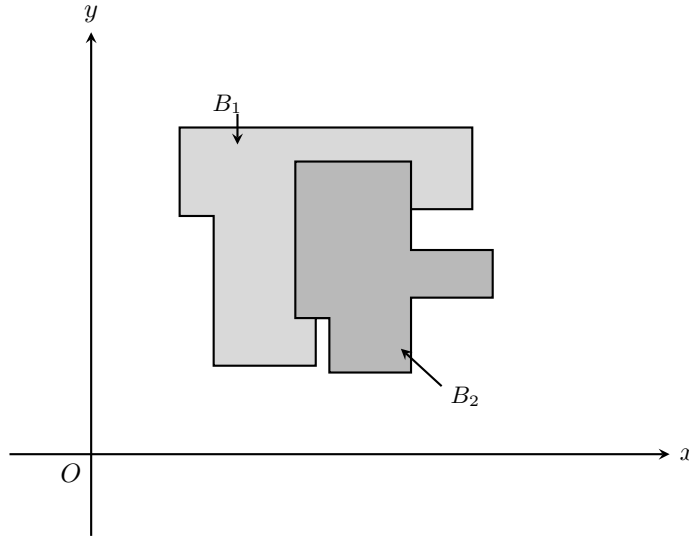


Proposition 3.2 (Proposition-Définition 2). Soit B une partie pavable de $\mathbb{R}^2$; si $P_1, \dots, P_N$ sont des pavés fermés bornés deux à deux quasi-disjoints tels que $B = \bigcup_{i=1}^N P_i$, le réel $\sum_{i=1}^N \mathcal{A}(P_i)$ ne dépend pas de $(P_1, \dots, P_N)$; ce réel est appelé l'aire de B , et noté $\mathcal{A}(B)$.

Remarque. La notion d'aire d'une partie pavable du plan prolonge celle d'aire d'un pavé fermé borné (cf. 13.2.1 1) p. 237).

Proposition 3.3. Soient B_1, B_2 deux parties pavables de $\mathbb{R}^2$.

1) $B_1 \cup B_2$ et $B_1 \cap B_2$ sont pavables et $\mathcal{A}(B_1 \cup B_2) + \mathcal{A}(B_1 \cap B_2) = \mathcal{A}(B_1) + \mathcal{A}(B_2)$.



2) Si $B_1 \subset B_2$, alors $B_2 - \overset{\circ}{B}_1$ est pavable et $\mathcal{A}(B_2 - \overset{\circ}{B}_1) = \mathcal{A}(B_2) - \mathcal{A}(B_1)$.

Partie quarrables

Définition 3.5. 1 Soit D une partie bornée de $\mathbb{R}^2$. On note :

- $\mathcal{A}^-(D)$ la borne supérieure des aires des parties pavables de $\mathbb{R}^2$ contenues dans D
- $\mathcal{A}^+(D)$ la borne inférieure des aires des parties pavables de $\mathbb{R}^2$ contenant D .

On dit que D est quarrable si et seulement si $\mathcal{A}^-(D) = \mathcal{A}^+(D)$; dans ce cas, on appelle aire de D , et on note $\mathcal{A}(D)$, le réel défini par :

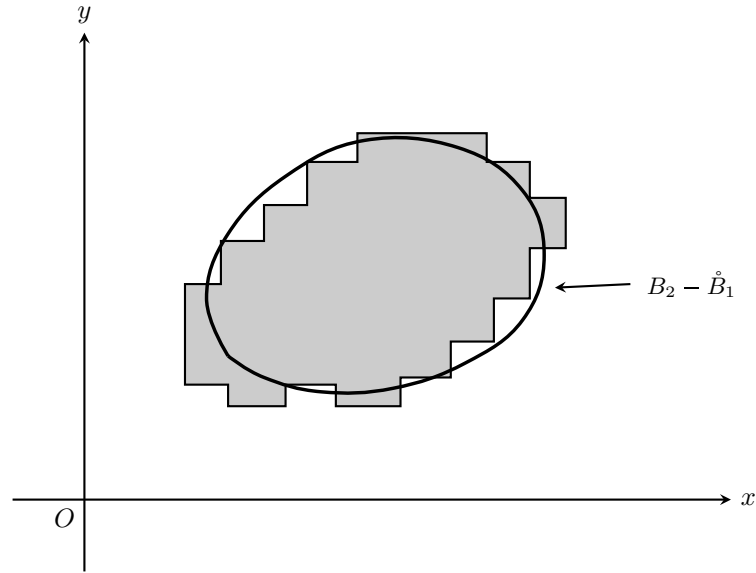
$$\mathcal{A}(D) = \mathcal{A}^-(D) = \mathcal{A}^+(D).$$

Remarque. 1) • $\mathcal{A}^+(D)$ existe ; en effet, puisque D est bornée, il existe un pavé fermé borné (donc pavable) P tel que $D \subset P$.

- $\mathcal{A}^-(D)$ existe car $\emptyset$ est une partie pavable de $\mathbb{R}^2$ incluse dans D et l'ensemble des aires des parties pavables de $\mathbb{R}^2$ contenues dans D est majoré par l'aire $\mathcal{A}(P)$ d'un pavé contenant D .

2) Pour qu'une partie D de $\mathbb{R}^2$ soit quarrable, il faut et il suffit que, pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$, il existe deux parties pavables $B_1 + B_2$ de $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\begin{cases} B_1 \subset D \subset B_2 \\ \mathcal{A}(B_2 - B_1) < \varepsilon \end{cases}.$$



- 3) Il existe des parties bornées de $\mathbb{R}^2$ non quarrables : $D = [0; 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ par exemple. où $\mathcal{A}^-(D) = 0$ et $\mathcal{A}^+(D) = 1$.

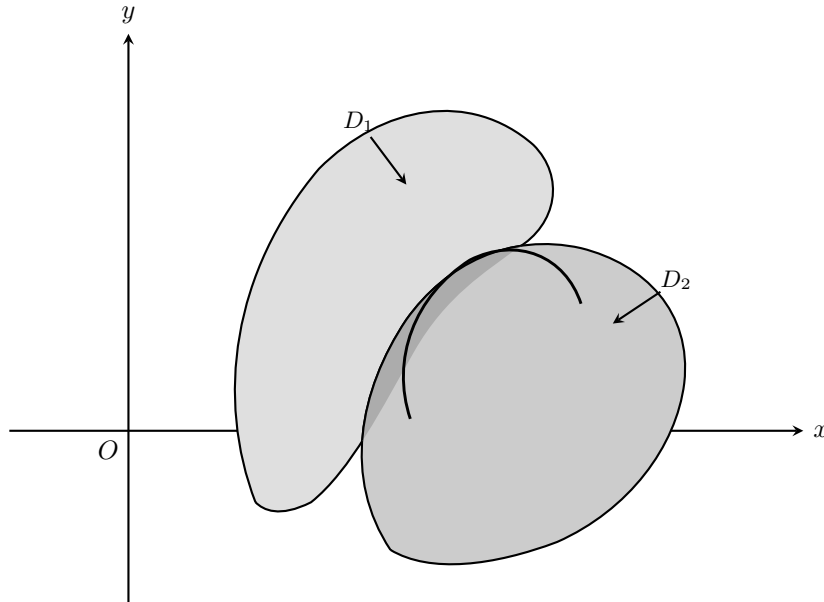
Proposition 3.4. Si D est une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$, alors $\bar{D}$ (ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ adhérents à D) et $\overset{\circ}{D}$ (intérieur de D dans $\mathbb{R}^2$) sont quarrables et :

$$\mathcal{A}(\bar{D}) = \mathcal{A}(\overset{\circ}{D}) = \mathcal{A}(D).$$

(L'intérieur $\overset{\circ}{D}$ de D est défini par : $\overset{\circ}{C}_{\mathbb{R}^2}(D)$ est l'ensemble des points adhérents à $\overset{\circ}{C}_{\mathbb{R}^2}(D)$).

Proposition 3.5. Soient D_1, D_2 deux parties quarrables de $\mathbb{R}^2$. Alors $D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2, D_1 - D_2$ sont quarrables et :

$$\mathcal{A}(D_1 \cup D_2) + \mathcal{A}(D_1 \cap D_2) = \mathcal{A}(D_1) + \mathcal{A}(D_2)$$



Proposition 3.6 (Proposition 3). Si D est une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ et θ une isométrie affine de $\mathbb{R}^2$, alors $\theta(D)$ est quarrable et :

$$\mathcal{A}(\theta(D)) = \mathcal{A}(D).$$

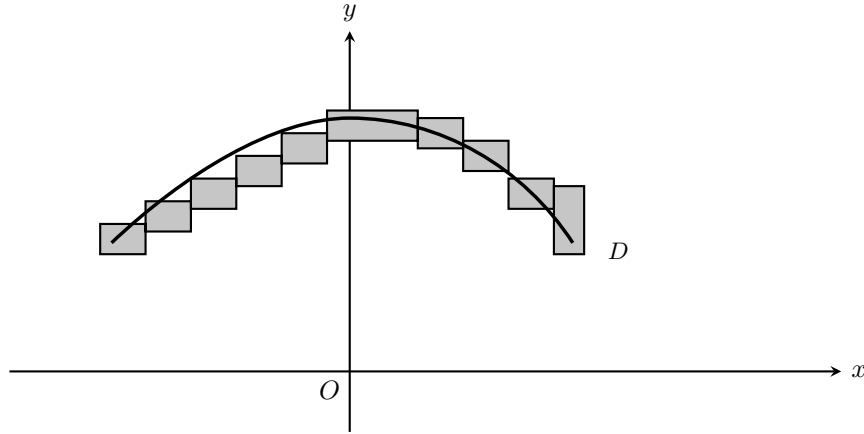
Autrement dit, l'aire est invariante par isométrie.

Le résultat précédent est aussi une conséquence du théorème de changement de variables (13.2.5 2) Théorème p. 249).

Définition 3.6 (Définition 2). Une partie quarrable D de $\mathbb{R}^2$ est dite négligeable si et seulement si $\mathcal{A}(D) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie pavable B de $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$D \subset B \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(B) < \varepsilon.$$

Proposition 3.7 (Proposition 4). Toute courbe de $\mathbb{R}^2$ de classe C^1 par morceaux est quarrable et négligeable (une telle courbe étant l'image d'une application $[0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dont les deux coordonnées sont de classe C^1 par morceaux).



Remarque. Il existe des « courbes » de $\mathbb{R}^2$ continues (mais non C^1 par morceaux) remplissant $[0; 1]^2$ (courbe de Péano) ; une telle courbe est quarrable, mais son aire vaut 1, ce qui peut paraître surprenant.

Proposition 3.8 (Proposition 5). Toute partie bornée de $\mathbb{R}^2$, limitée par une courbe de classe C^1 par morceaux, est quarrable.

Le cas le plus fréquent (pour le calcul des intégrales doubles) est celui où D est défini par des inégalités du type :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \end{cases},$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ($a \leq b$) et $\varphi_1, \varphi_2 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont des applications (cf. 13.2.4. p. 245).

On dispose plus généralement du théorème suivant, où la frontière de D est définie par :

$$\text{Fr}(D) = \overline{D} \cap \overline{C_{\mathbb{R}^2}(D)}$$

et $\overline{X}$ désigne l'ensemble des points adhérents à X .

Théorème 3.1. Pour qu'une partie bornée D de $\mathbb{R}^2$ soit quarrable, il faut et il suffit que sa frontière $\text{Fr}(D)$ soit négligeable.

3.1.2 Définition de l'intégrale double

Intégration des applications en escalier sur un pavé fermé borné

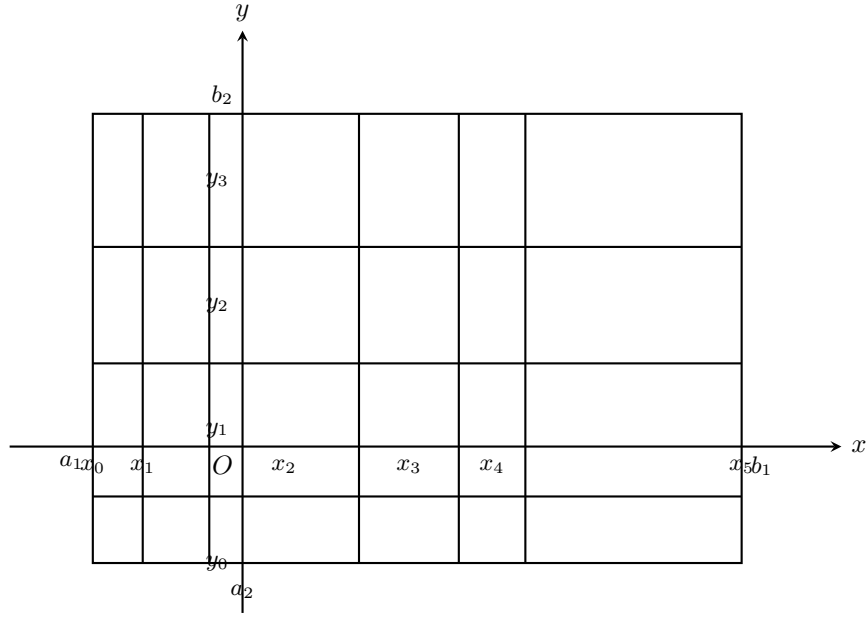
Définition 3.7 (Définition 1). Soit $P = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^2$. On appelle subdivision de P toute famille finie σ de points de P telle qu'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$ de $[a_1; b_1]$ et une subdivision $(y_j)_{0 \leq j \leq q}$ de $[a_2; b_2]$ telles que $\sigma = ((x_i, y_j))_{0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q}$.

Rappelons (cf. 6.1.1, Tome 1, p. 163) qu'une subdivision de $[a_1; b_1]$ est une famille $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$ d'éléments de $[a_1; b_1]$ telle que :

$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{p-1} < x_p = b_1.$$

On appelle cellules de la subdivision σ de P les pavés fermés bornés

$$[x_i; x_{i+1}] \times [y_j; y_{j+1}], (i, j) \in \{0, \dots, p-1\} \times \{0, \dots, q-1\}.$$



Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de P .

Définition 3.8 (Définition 2). Soit P un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

- 1) Soit $e : P \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bornée; on dit que e est en escalier sur P si et seulement s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}$ telle que e soit constante sur l'intérieur de chaque cellule de σ , c'est-à-dire : il existe une subdivision $((a_i, b_j))_{0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q}$ de P et une famille de réels $(\lambda_{i,j})_{0 \leq i \leq p-1, 0 \leq j \leq q-1}$ tels que :

$$0 < j < q - 1$$

$$\forall (i, j) \in \{0, \dots, p-1\} \times \{0, \dots, q-1\}, \quad \forall (x, y) \in]x_i; x_{i+1}[\times]y_j; y_{j+1}[\\ e(x, y) = \lambda_{i,j}.$$

- 2) Soient $e : P \longrightarrow \mathbb{R}$ une application en escalier et $\sigma \in \mathcal{S}$; on dit que σ est adaptée à e si et seulement si e est constante sur l'intérieur de chaque cellule de σ .

Proposition 3.9 (Proposition-Définition 3). Soient P un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^2$, $e : P \longrightarrow \mathbb{R}$ une application en escalier sur P , $\sigma = ((x_i, y_j))_{0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q}$ une subdivision de P adaptée à e , $\lambda_{i,j}$ la valeur de e sur $]x_i; x_{i+1}[\times]y_j; y_{j+1}[$.

Le réel

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq p-1 \\ 0 \leq j \leq q-1}} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \lambda_{i,j}$$

ne dépend pas du choix de la subdivision σ adaptée à e ; ce réel est appelé l'intégrale de e sur P , et notée

$$\iint_P e \quad \text{ou} \quad \iint_P e(x, y) dx dy.$$

Remarque. On remarquera que $(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$ est l'aire du pavé $[x_i; x_{i+1}] \times [y_j; y_{j+1}]$.

Cas des applications définies sur un pavé fermé borné

Définition 3.9 (Définition 1). Soient P un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^2$, $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bornée.

On dit que f est *intégrable* sur P si et seulement s'il existe deux suites $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications en escalier sur P telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f - e_n| \leq \varphi_n \\ \iint_P \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{array} \right.$$

Tout couple $((e_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}})$ vérifiant la condition précédente est dit *associé* à f .

Proposition 3.10 (Proposition-Définition 2). Soient P un pavé fermé borné, $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ une application intégrable sur P . Pour tout couple $((e_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}})$ associé à f , la suite $(\iint_P e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, et sa limite ne dépend pas du choix du couple $((e_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}})$ associé à f . Cette limite s'appelle l'intégrale (double) de f sur P et est notée

$$\iint_P f \quad \text{ou} \quad \iint_P f(x, y) \, dx \, dy.$$

Cas des applications définies sur une partie quarrable

Soient D une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bornée.

Proposition 3.11. Pour tout pavé fermé borné P contenant D , notons

$$f_P : P \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D \end{cases}$$

S'il existe un pavé fermé borné P contenant D tel que f_P soit intégrable sur P , alors pour tout pavé fermé borné Q contenant D , f_Q est intégrable sur Q et

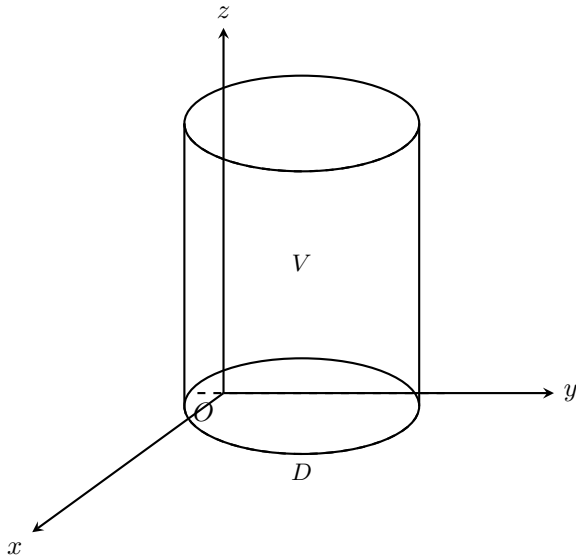
$$\iint_P f_P = \iint_Q f_Q.$$

Définition 3.10 (Définition 3). On dit que f est intégrable sur D si et seulement s'il existe un pavé fermé borné P contenant D tel que f_P soit intégrable sur P , et on appelle alors intégrale (double) de f sur D le réel, noté $\iint_D f$, défini par :

$$\iint_D f = \iint_P f_P.$$

Théorème 3.2. Toute application $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et continue sur une partie quarrable D de $\mathbb{R}^2$ est intégrable sur D .

Ce théorème assure l'existence de la plupart des intégrales doubles que le lecteur sera amené à envisager, dans le cadre des programmes.



En supposant $f \geq 0$, $\iint_D f$ représente le volume de la partie E suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \begin{cases} (x, y) \in D \\ 0 \leq z \leq f(x, y) \end{cases} \right\}.$$