

CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL.

V01

Table des matières

1. Objectifs	3
2. Introduction	4
3. Définition	5
4. Repérage d'un mobile ponctuel	6
5. Trajectoire d'un mobile.	7
6. Vecteur-vitesse	8
7. Vecteur-accélération.	10
8. Courbure d'une trajectoire.	12
9. Quelques mouvements particuliers.	13
9.1. Mouvement rectiligne.....	13
9.2. Mouvement circulaire.....	13
10. Changement de référentiels	14
10.1. Composition des vitesses.....	14
10.2. Composition des accélérations.....	15
10.3. Cas particulier.....	16
11. Exercices	17

1. Objectifs

- Définir la notion de cinématique ;
- Faire le repérage d'un point mobile dans un repère ;
- Définir le vecteur-position ;
- Définir le vecteur-vitesse ;
- Définir le vecteur-accélération ;
- Définir la courbure d'une trajectoire ;
- Etudier des mouvements simples ;
- Faire le changement de référentiels.

2. Introduction

La particule ponctuelle ou point matériel est sans dimension. C'est une création de l'esprit, un modèle représentant un objet physique de masse m , qui n'est animé que de mouvement de translation (pas de rotation sur lui-même).

3. Définition

La cinématique du point matériel est l'étude du mouvement d'une particule sans tenir compte des causes de ce mouvement. Faire la cinématique d'un point matériel consiste en général, à partir des paramètres de position pour déterminer la trajectoire, la vitesse et l'accélération du mobile ponctuel.

4. Repérage d'un mobile ponctuel

Dans un système d'axes d'origine O , un mobile ponctuel M est repéré à l'instant t donné, par son vecteur-position $\overrightarrow{OM}$.

- En coordonnées cartésiennes (Figure 1.4), la position instantanée du mobile est donnée par les coordonnées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ et nous avons : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

- En coordonnées polaires (Figure 1.5), la position instantanée du mobile est donnée par les coordonnées $\rho(t)$ et $\theta(t)$ avec : $\overrightarrow{OM} = \rho(t)\vec{e}_\rho$.

- En coordonnées cylindrique (Figure 1.6), le mobile M est repéré à l'instant t donné, par ses coordonnées $\rho(t)$, $\varphi(t)$ et $z(t)$ avec :

$$\overrightarrow{OM} = \rho(t)\vec{e}_\rho + z(t)\vec{e}_z.$$

- En coordonnées sphériques (Figure 1.7), le mobile M est repéré à l'instant t donné, par ses coordonnées $r(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ et nous avons :

$$\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{e}_r.$$

- En coordonnées curvilignes, le mobile M est repéré à l'instant t donné, par son abscisse curviligne s avec :

$s = \widehat{M_0M}$, où M_0 est la position initiale ($t = 0s$) du mobile M sur la position d'arc qu'il décrit.

5. Trajectoire d'un mobile.

La trajectoire d'un mobile est l'ensemble des positions successives occupées par le mobile au cours de son mouvement. Elle peut être une droite, un cercle, une parabole, une ellipse, une branche hyperbolique ou une courbe quelconque. La nature de la trajectoire est déduite de son équation qui est la relation indépendante de temps t entre les paramètres de position.

6. Vecteur-vitesse

Qui dit mouvement pense intuitivement à une rapidité ou non du mouvement. Cette notion, ce concept est qualifié par la définition du vecteur-vitesse. Le vecteur-vitesse moyen d'un mobile qui occupe la position M à l'instant t et la position M' à l'instant t' avec $t' > t$ est :

$$\vec{V}_{\text{moy}} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t' - t}.$$

Le vecteur-vitesse instantanée $\vec{V}$ est la dérivée du vecteur-position par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \lim_{t \rightarrow t'} \vec{V}_{\text{moy}} \\ &= \lim_{t \rightarrow t'} \frac{\overrightarrow{MM'}}{t' - t} \\ &= \lim_{t \rightarrow t'} \frac{\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}}{t - t'} \\ \vec{V} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}.\end{aligned}$$

En se référant à l'expression $d\overrightarrow{OM}$ (formule 1.10, 1.14, 1.22 et 1.33) dans chacun des systèmes de coordonnées, le vecteur-vitesse instantané $\vec{V}$ est donné par :

- En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

$$\vec{V} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}$$

- En coordonnées polaires :

$$\vec{V} = \frac{d\rho}{dt} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{V} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\vec{V} = \frac{d\rho}{dt} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$$

$$\vec{V} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z.$$

- En coordonnées sphériques :

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{V} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + (r \sin \theta) \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi.$$

La norme du vecteur-vitesse instantané est la vitesse du mobile à l'instant t donné. C'est aussi la dérivée de l'abscisse curviligne s par rapport au temps,

$$v = \|\vec{V}\| = \frac{ds}{dt}.$$

Le vecteur-vitesse instantané d'un mobile de position M à la date t est toujours tangent à la trajectoire de ce mobile en M et orienté dans le sens du mouvement. La courbe décrite par l'extrémité du vecteur-vitesse d'un point matériel, portée à partir d'une même origine est appelée hodographe.

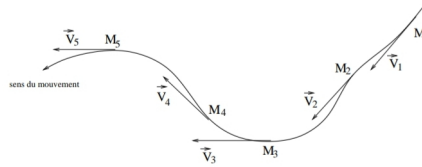


FIGURE 2.1: Trajectoire d'une particule ponctuelle

7. Vecteur-accélération.

Intuitivement, le vecteur-vitesse $\vec{V}$ d'un mobile peut varier le long de la trajectoire. Pour quantifier cet effet on définit le vecteur-accélération.

Le vecteur-accélération moyen d'un mobile dont la vitesse est $\vec{V}$ à l'instant t et $\vec{V}'$ à l'instant t' avec $t' > t$ est :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{V}' - \vec{V}}{t' - t}.$$

Le vecteur-accélération instantané $\vec{a}$ est la dérivée par rapport au temps du vecteur-vitesse instantané. C'est aussi la dérivée seconde du vecteur-position par rapport au temps.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \lim_{t \rightarrow t'} \vec{a}_{moy} \\ &= \lim_{t \rightarrow t'} \frac{\vec{V} - \vec{V}'}{t - t'} \vec{a} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2}.\end{aligned}$$

• En coordonnées cartésienne :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k} \\ \vec{a} &= \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}.\end{aligned}$$

• En coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\rho}{dt} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \right) \\ \vec{a} &= \left(\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_\rho + \left(2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \rho \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \vec{e}_\theta \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta.\end{aligned}$$

• En coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\rho}{dt} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z \right) \\ \vec{a} &= \frac{d^2 \rho}{dt^2} \vec{e}_\rho + \frac{d\rho}{dt} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + \rho \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \vec{e}_\varphi + \rho \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{e}_z \\ \vec{a} &= \frac{d^2 \rho}{dt^2} \vec{e}_\rho + \frac{d\rho}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + \frac{d\rho}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + \rho \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \vec{e}_\varphi - \rho \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \vec{e}_\rho + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{e}_z \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z\end{aligned}$$

- En coordonnées sphériques :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = & \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{e}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \vec{e}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \sin \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + \\ & + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + r \sin \theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \vec{e}_\varphi + r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \end{aligned}$$

8. Courbure d'une trajectoire.

Le vecteur-vitesse $\vec{V}$ étant tangent à la trajectoire, nous pouvons définir le vecteur unitaire tangentiel $\vec{\tau}$ par :

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}}{V}$$

où V est la norme du vecteur-vitesse $\vec{V}$.

La courbe $\vec{C}$ de la trajectoire est la dérivée du vecteur unitaire tangentiel $\vec{\tau}$ par rapport à l'abscisse curviligne s . Elle est dirigée suivant le vecteur normal $\vec{n}$:

$$\vec{C} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = C \vec{n}.$$

En introduisant la variable de temps t nous obtenons :

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \frac{d\vec{\tau}}{ds} \\ &= \frac{d\vec{\tau}}{dt} \frac{dt}{ds} \\ &= \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} \frac{d\vec{\tau}}{dt} \vec{C} \\ &= \frac{1}{V} \frac{d\vec{\tau}}{dt} \\ &= C \vec{n}.\end{aligned}$$

Le rayon de courbure R_c est l'inverse de la courbure C :

$$C = \frac{1}{V} \left\| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right\| \quad \text{et} \quad R_c = \frac{1}{C} = V \left\| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right\|^{-1}.$$

Le vecteur unitaire normal $\vec{n}$ est donc donné par :

$$C = \frac{1}{CV} \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{R_c}{V} \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Il existe un vecteur unitaire $\vec{B} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$ tel que la base $(\vec{B}, \vec{\tau}, \vec{n})$ soit directe. Cette base est appelée base de Frenet.

9. Quelques mouvements particuliers.

9.1. Mouvement rectiligne.

Le mouvement d'un point matériel M est rectiligne si sa trajectoire est une droite. Dans ce cas nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} ; \vec{v} = \dot{x} \vec{i} \text{ et } \vec{a} = \ddot{x} \vec{i}$$

Le mouvement est rectiligne uniforme si le vecteur-vitesse est constant ou vecteur-accélération nul et l'équation horaire est :

$$x = vt + x_0.$$

Le mouvement est rectiligne uniformément varié si le vecteur-accélération est constant et les équations horaires s'écrivent :

$$v = a(t - t_0) + v_0 \text{ et } x = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0,$$

où x_0 et v_0 sont la position et la vitesse du mobile à l'instant initial $t = t_0$. Si $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$ alors le mouvement est uniformément accéléré ; si $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$ alors le mouvement est uniformément retardé.

Le mouvement est rectiligne sinusoïdal si son vecteur-position s'écrit

$$\overrightarrow{OM} = x(t) \vec{i} \text{ avec } x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi),$$

x_m est l'amplitude du mouvement ; ω est la pulsation ; φ est la phase à l'origine des dates et $\omega t + \varphi$ est la phase à l'instant t . Le mouvement rectiligne sinusoïdal est régi par l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

9.2. Mouvement circulaire.

Le mouvement d'un point matériel est circulaire si sa trajectoire est un cercle de rayon R . En coordonnées polaires nous avons :

$$\overrightarrow{OM} = R \vec{e}_\rho$$

$$\vec{V} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_\rho + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

Le mouvement est circulaire uniforme si la vitesse v du mobile est constante ce qui implique que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est aussi constante et $\ddot{\theta} = 0$. Dans ce cas, l'accélération se réduit à sa composante normale

$$\vec{a}_n = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_\rho \text{ et } a_n = \frac{v^2}{R} = R\dot{\theta}^2,$$

et nous notons que le vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ est centrifuge alors que l'accélération normale $\vec{a}_n$ est centripète.

10. Changement de référentiels

Soit à étudier le mouvement d'une particule M par rapport à un repère fixe R , appelé repère absolu. Il est parfois intéressant d'introduire un second repère R' dit repère relatif, par rapport auquel le mouvement de M soit plus simple à étudier. Le repère relatif R' est en mouvement de translation et/ou de rotation par rapport au repère absolu R avec la vitesse de rotation $\vec{\Omega}$. La particule M est repérée par son vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ dans R et par son vecteur-vitesse $\overrightarrow{O'M}$ dans R' (Figure 2.2).

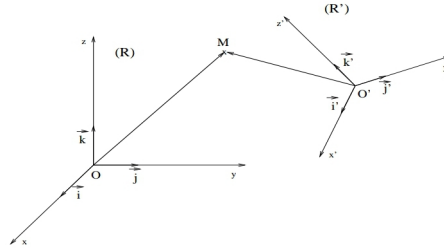


FIGURE 2.2: Changement de référentiels

Les dérivées par rapport au temps, des vecteurs de base de R' sont données par :

- Dans R ,

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} \Big|_R = \vec{\Omega} \wedge \vec{i}' ; \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} \Big|_R = \vec{\Omega} \wedge \vec{j}' ; \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} \Big|_R = \vec{\Omega} \wedge \vec{k}'$$

- Dans R' ,

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} \Big|_{R'} = \frac{d\vec{j}'}{dt} \Big|_{R'} = \frac{d\vec{k}'}{dt} \Big|_{R'} = 0$$

La dérivée par rapport au temps, dans R , d'un vecteur $\vec{A} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$ de R' s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_R &= \dot{x}'\vec{i}' + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} \Big|_R + \dot{y}'\vec{j}' + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} \Big|_R + \dot{z}'\vec{k}' + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} \Big|_R = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}' + x'\vec{\Omega} \wedge \vec{i}' + y'\vec{\Omega} \wedge \vec{j}' + z'\vec{\Omega} \wedge \vec{k}' \\ \frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_R &= (\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}') + \vec{\Omega} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') = \frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{A}. \end{aligned}$$

10.1. Composition des vitesses

La vitesse du mobile M dans le repère fixe R est sa vitesse absolue $\vec{V}_a$:

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_R.$$

La vitesse du mobile M dans le repère mobile R' est sa vitesse relative $\vec{V}_r$:

$$\vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \Big|_{R'}.$$

En écrivant que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ et en utilisant la formule (2.41) nous obtenons :

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_R = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \Big|_R + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \Big|_R = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \Big|_R + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \Big|_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \vec{V}_a$$

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_R = \vec{V}_r + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \Big|_R + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}.$$

L'expression

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \Big|_R + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M},$$

est appelé vitesse d'entraînement du mobile M. vitesse d'entraînement de M est la vitesse absolue du point (imaginaire) qui coïncide avec M à l'instant t et supposé fixe dans le repère R' . On peut aussi noter la vitesse d'entraînement de M comme suit,

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_R \quad (\text{M fixe dans } R')$$

La loi de composition des vitesses en mécanique classique peut donc s'écrire :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

10.2. Composition des accélérations.

L'accélération du mobile dans le référentiel fixe R est son accélération absolue $\vec{a}_a$:

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \Big|_R = \frac{d\vec{V}_a}{dt} \Big|_R.$$

L'accélération du mobile dans le référentiel mobile R' est son accélération relative $\vec{a}_r$:

$$\vec{a}_r = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} \Big|_{R'} = \frac{d\vec{V}_r}{dt} \Big|_{R'}.$$

En utilisant la loi de composition des vitesses de l'expression (2.44) nous obtenons :

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} \Big|_R = \frac{d\vec{V}_r}{dt} \Big|_R + \frac{d}{dt} \left[\frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt} \Big|_R + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \right].$$

Le développement de la formule (2.50) donne :

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} \Big|_R = \frac{d\vec{V}_r}{dt} \Big|_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r = \vec{a}_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) \Big|_R = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \Big|_R = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \Big|_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \right)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) \Big|_R = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}).$$

Remplaçons les expressions (2.51) et (2.52) dans (2.50) nous obtenons :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} |_R + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r.$$

En posant

$$\vec{a}_e = \vec{a}_r + \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} |_R + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) \quad \vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r,$$

la loi de composition des accélérations en mécanique classique s'écrit :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

$\vec{a}_e$ désigne l'accélération d'entraînement et $\vec{a}_c$ est l'accélération de Coriolis ou complémentaire.

10.3. Cas particulier.

Si le repère R' est uniquement en translation par rapport à R alors $\vec{\Omega} = 0$, dans ce cas nous avons : $\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_a(O')$ et $\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_a(O')$.

Si de plus, R' est en translation uniforme par rapport à R alors

$$\vec{V}_a(O') = \overrightarrow{cte} \quad \text{et} \quad \vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M).$$

11. Exercices

Exercice 1

Établir les expressions du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération dans chacun des systèmes de coordonnées polaire, cylindrique et sphérique.

Exercice 2

Montrer que dans un mouvement curviligne quelconque l'accélération d'une particule dans la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{\eta})$ est donnée par :

$$a) \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} \vec{\tau} + \frac{\|\vec{a} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} \vec{\eta}$$

$$b) \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R_c} \vec{\eta}$$

$$c) \text{ Établir que } \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{\eta}}{R_c}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse de la particule à l'instant t , s est son abscisse curviligne et R_c est le rayon de courbure de sa trajectoire.

Exercice 3

Un mobile M décrit une hélice circulaire d'axe Oz , définie par les équations, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = h\theta \end{cases}$$

avec $\theta(t) = \omega t$; R , ω et h sont des constantes.

1) Déterminer la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$ du mobile. On précisera leurs modules et leurs directions.

2) En déduire l'expression du rayon de courbure R_c de la trajectoire.

3) Reprendre la même étude en coordonnées cylindrique.

On considère maintenant que la loi d'évolution $\theta(t)$ est quelconque.

a) Exprimer $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associée aux coordonnées cylindriques, en fonction des données et des dérivées de $\theta(t)$.

b) En introduisant le rayon de courbure R_c , montrer que :

$$\begin{cases} \vec{v} = \sqrt{RR_c} \dot{\theta} \vec{\tau} \\ \vec{a} = \sqrt{RR_c} \ddot{\theta} \vec{\tau} + R \dot{\theta}^2 \vec{n} \end{cases}$$

$(\vec{\tau}, \vec{n})$ étant la base de Frenet.

Exercice 4

Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un mobile se déplace avec une accélération $\vec{a}$ dont les composantes sont $a_x = 0,8 \text{ m/s}^2$; $a_y = a_z = 0$. À l'instant $t = 0 \text{ s}$, le mobile M est à l'origine du repère et les composantes de sa vitesse à cet instant sont $v_x = v_z = 0$ et $v_y = 0,8 \text{ m/s}$.

Déterminer :

La nature de la trajectoire du mobile.

La vitesse du mobile à $t = 1 \text{ s}$.

Le rayon de courbure de la trajectoire au point correspondant à $t = 1 \text{ s}$.

Exercice 5

Les équations horaires d'un mouvement plan sont données par

$$x(t) = c \cos(kt^2) \text{ et } y(t) = a \sin(kt^2),$$

où a et k sont des constantes et t est le temps.

- 1) Quelle est la nature de la trajectoire de ce mouvement ?
- 2) Déterminer les composantes et la norme de la vitesse. Le mouvement est-il uniforme ?
- 3) Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération.

Exercice 6

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les composantes du vecteur-position d'un mobile M sont données par :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = \theta^2 - 1 \\ y = 2\theta \\ z = 0 \end{cases}$$

où θ est une fonction du temps telle que $\theta + \frac{\theta^3}{3} = t$. On étudie le mouvement de M entre $t = 0$ et $t = +\infty$.

- 1) Déterminer la nature de la trajectoire du mobile M .
- 2) Déterminer la vitesse $\vec{v}$ du mobile et calculer sa norme en fonction de θ .
- 3) Déterminer l'accélération $\vec{a}$ du mobile et calculer sa norme en fonction de θ .
- 4) En déduire que $\vec{a}$ porté par le vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ et donner son expression en fonction de $\overrightarrow{OM}$ et $r = \|\overrightarrow{OM}\|$.
- 5) Montrer que $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$.

Exercice 7

Un disque (d) de rayon r , roule sans glisser autour d'un disque (D) de rayon R . Soit M un point de la périphérie de (d) . Exprimer la vitesse et l'accélération de M dans le repère lié à (D) .

Exercice 8

Un point M décrit la spirale logarithmique $r = r_0 \exp(\theta)$ avec une vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ constante. On prendra $\theta = 0$ à l'instant $t = 0$ s.

- 1) Calculer les composantes de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$.
- 2) Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.
- 3) Donner la valeur du rayon de courbure pour $\theta = 0, 90^\circ$ et 180° .

Exercice 9

Un navire N est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}$ le long d'une droite $\mathcal{D}$. Un sous-marin immobile S tire une torpille T à l'instant où l'angle $(\vec{v}, \overrightarrow{NS})$ a la valeur α . T étant animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{u}$, donner l'expression de l'angle de tir $\theta = (\overrightarrow{SN}, \vec{u})$ si l'on veut couler le navire N .

Exercice 10

Un train animé d'un mouvement rectiligne uniforme roule à 72km/h lorsqu'une lanterne suspendue à sa queue à $4,9\text{m}$ du sol se détache à cause des secousses.

- 1) Calculer la distance parcourue par le train pendant le temps que met la lampe pour tomber sur le sol.
- 2) Où tombe la lampe par rapport au train et par rapport aux rails ?
- 3) Quelle est la trajectoire de la lanterne par rapport au train et par rapport aux rails ?

Exercice 11

$(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ étant le trièdre de Frenet représenté par en un point P d'une courbe, on donne les formules suivantes :

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T},$$

où $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{T}$ sont respectivement la courbure et la torsion de la courbure en P et s est l'abscisse curviligne de P .

- 1) Calcule $\frac{d\vec{n}}{ds}$
- 2) Établir l'expression ci-dessous :

$$\frac{1}{T} = \frac{\left[\frac{d\vec{OP}}{dt}, \frac{d^2\vec{OP}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{OP}}{dt^3} \right]}{\left\| \frac{d\vec{OP}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{OP}}{dt^2} \right\|^2}$$

où $\left[\frac{d\vec{OP}}{dt}, \frac{d^2\vec{OP}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{OP}}{dt^3} \right]$ représente le produit mixte des trois vecteurs dérivés du vecteur position $\vec{OP}$.

Exercice 12

Dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un cercle de centre C et de rayon R roule sans glisser sur l'axe (Ox) . Son centre C est animé d'une vitesse constante $\vec{V}_c$ parallèle à (Ox) .

- 1) Donner en fonction du temps les expressions des coordonnées x et y d'un point M du cercle, de vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \omega \vec{k}$; $\vec{k}$ étant un vecteur unitaire perpendiculaire au plan (P) tel que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forme un trièdre direct.
- 2) Déterminer les composantes et le module du vecteur vitesse $\vec{v}$, à partir des coordonnées x et y du point M .
- 3) Déterminer les composantes et le module du vecteur accélération $\vec{a}$, à partir des coordonnées x et y du point M .
- 4) Retrouver les résultats de la question 2 à partir de la composition des vitesses.
- 5) Retrouver les résultats de la question 3 à partir de la composition des accélérations.

Exercice 13

On considère la courbe définie par l'équation polaire $\rho = \rho_0(1 + \cos \theta)$, $\rho_0 > 0$ dans un plan donné. Un point matériel décrit cette courbe de telle manière qu'au cours du temps l'angle polaire θ reste proportionnel à t avec $\theta = \omega t$.

- 1) Exprimer le vecteur position du point M .

- 2) Dessiner l'allure de la trajectoire ; pour cela prendre plusieurs valeurs de $\theta(0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi)$ et des valeurs voisines de $\pi(2, 7rad, 2, 8rad, 2, 9rad, \text{ et } 3rad)$. On vérifiera que $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$.
- 3) Préciser les directions des vecteurs de la base de Frenet $(\vec{t}, \vec{n})$ et ceux de la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, sur la figure au point $M(\rho, \theta)$.
- 4) Calculer la vitesse de l'accélération du point M (en coordonnées polaires) et préciser leurs directions aux points de la trajectoire définis par $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$.
- 5) Calculer la vitesse et l'accélération en coordonnées intrinsèques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.
- 6) Calculer le rayon de courbure au point $M(\rho, \theta)$.