RAPPELS ET COMPLEMENTS DE MATHEMATIQUE POUR LA PHYSIQUE.

V01

Table des matières

1. Objectifs

- Définir le calcul vectoriel ;
- Définir le calcul différentiel ;
- Définir les systèmes de coordonnées ;
- Faire un changement de base ;
- Définir des opérateurs différentiels.

2. Introduction

Cette leçon aborde les outils mathématiques qui nous seront utiles pour résoudre des problèmes tant en mécanique du point matériel; qu’en électricité; mécanique des fluides et la thermodynamique.

3. Calcul vectoriel

3.1. Grandeur scalaire - Grandeur vectorielle

Une grandeur scalaire est une quantité qui peut être entièrement décrite par une seule valeur numérique (réelle ou complexe), accompagnée éventuellement d'une unité. Elle ne dépend ni de direction ni de sens. Exemples : la température, la masse, l'énergie. En revanche, une grandeur vectorielle est une quantité qui possède à la fois une magnitude (ou norme) et une direction. Elle est représentée par un vecteur, défini par ses composantes dans un système de coordonnées donné. Exemples : le vecteur-vitesse, la force, le champ électrique.

3.2. Trièdre-repère

Un trièdre est un système de trois axes dans lequel on représente les vecteurs. Le trièdre st dit direct s'il est orienté dans le sens de rotation de la terre autour de l'axe de ses pôles. Le trièdre est orthonormé si ses vecteurs de base sont orthonormés.

Un repère est un trièdre muni d'une origine qui est l'origine des axes. Nous avons par exemple, le repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$dans lequel un vecteur $\vec{u}$ est donné par $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

3.3. Produit scalaire

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u}.\vec{v}$ est le scalaire donné par :
$\vec{u}.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

En coordonnées cartésiennes, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont exprimés par :

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

Alors, nous avons :

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

$\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ sont les normes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

respectivement avec :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$

Remarques

$\vec{u}.\,\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

$\vec{u}.\,\vec{u} = 1$ on dit que $\vec{u}$ est un vecteur normé ou unitaire.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Longrightarrow \vec{u}.\,\vec{v} = 0$

$\vec{u}.\,\vec{v} = \vec{v}.\,\vec{u}$

3.4. Produit vectoriel

FIGURE 1.1: *Aire de surface que représente la norme du produit vectoriel* $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ défini par :

$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})\vec{n}$,

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal au plan formé par les vecteurs $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ de sorte que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit direct. Le produit vectoriel est aussi est aussi appelé produit extérieur. La norme du vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ représente l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{\ }$.

En coordonnées cartésiennes, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donnés par leurs composantes :

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$,

alors nous avons :

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

dont le développement donne :

$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - y'z)\vec{i} - (xz' - x'z)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$.

Remarques

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

$\vec{u} \parallel \vec{v} \Longrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

$\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{t}) \neq (\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{t}$

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère orthonormé direct alors : $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$.

3.5. Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs quelconques $\vec{u}$, $\vec{v}$et $\vec{w}$ est le scalaire $\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$. Par permutation circulaire nous avons : $\vec{u}.\ (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v}.(\vec{w} \wedge \vec{u}) = \vec{w}(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

La valeur absolue du produit mixte $\vec{u}.\ (\vec{v} \wedge \vec{w})$ représente le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

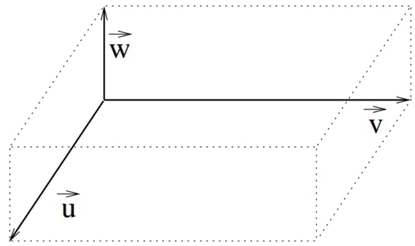

FIGURE 1.2: *Volume que représente le produit mixte*

En coordonnées cartésiennes si les vecteurs sont donnés par leurs composantes :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

alors le produit mixte s'écrit :

$$\vec{u}.\,(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

3.6. Moment d'une force par rapport à un point.

Soit $\vec{u}$ un vecteur appliqué en un point M de l'espace, le moment du vecteur $\vec{u}$ par rapport à un autre point O de l'espace est le vecteur défini par :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{u}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}$$

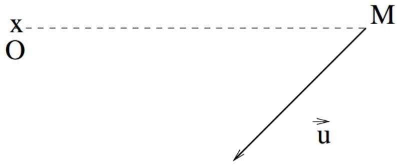

FIGURE 1.3: *Moment de $\vec{u}$ par rapport au point O*

Le moment de $\vec{u}$ par rapport à un axe Δ passant par O et de vecteur directeur unitaire $\vec{n}$ est scalaire défini par :

$$M(\vec{u}/_{\Delta}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{u}).\,\vec{n}$$

4. Calcul différentiel.

4.1. Fonction à une seule variable

Une fonction numérique f à une variable réelle, continue sur un intervalle $\mathbf{I}$ est dite dérivable en $x_0 \in \mathbf{I}$ si et seulement si

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Cette limite est appelée le nombre dérivée de f au point x_0 et est notée $f'(x_0)$.

La différentielle de la fonction f est :

$df(x) = f'(x)dx.$

Exemple :

Soit, dans $\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2$ alors $f'(x) = 3x^2 + 4x$ et $df(x) = (3x^2 + 4x)dx$.

4.2. Fonction à deux variables.

Soit f une fonction numérique de variables x et y:

La dérivée partielle de f par rapport à x est notée $f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

La dérivée partielle de f par rapport à y est notée $f'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

La différentielle de f s'écrit :

$$df = f'_x dx + f'_y dy = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy.$$

Exemple :

$Soit, dans \mathbb{R}, f(x, y) = 2x^2y + 3xy^3$ alors nous avons :

$f'_x(x, y) = 4xy + 3y^3$

$f'_y(x, y) = 2x^2 + 9xy^2$

$df(x, y) = (4xy + 3y^3)dx + (2x^2 + 9xy^2)dy.$

5. Système de coordonnées

Il existe plusieurs systèmes de coordonnées. Ils permettent de repérer un point M de l'espace. Pour résoudre un problème, il faut choisir le système de coordonnées adapté à ce problème.

Nous présentons ici les systèmes de coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques.

5.1. Coordonnées cartésiennes

Le point M de l'espace est repéré par les composantes x , y et z du vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (voir figure 1.4) :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

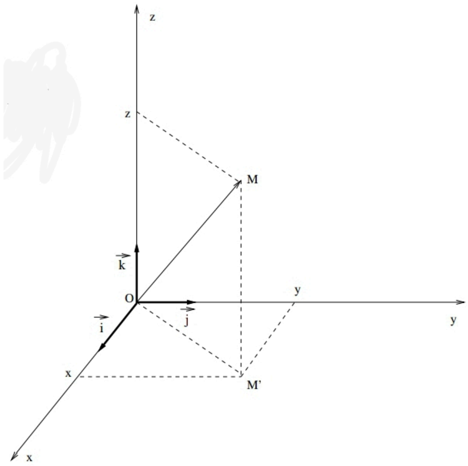

FIGURE 1.4: *Repère Cartésien direct*

À un déplacement infiniment petit du point M correspond le vecteur $\overrightarrow{dOM}$ défini par :

$\overrightarrow{dOM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$.

L'élément de surface ds dans le plan (xOy) et l'élément de volume dv sont donnés respectivement par :

$ds = dx\,dy$ et $dv = dx\,dy\,dz$.

L'élément de longueur en coordonnées cartésiennes est donné par :

$dl = \|\overrightarrow{dOM}\| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

5.2. Coordonnées polaires.

Le point M du plan est repéré par ses coordonnées polaires (ρ, θ) dans le repère polaire $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ avec $\rho = \|\overrightarrow{OM}\|; \theta = (\vec{i},\ \vec{e}_\rho)$(voir figure 1.5).

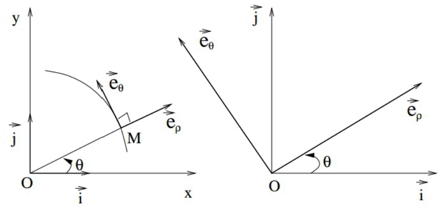

FIGURE 1.5: *Repère de coordonnées polaires*

Le vecteur-position dans cette base s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho$.

Les vecteurs de base polaire sont liés aux vecteurs de base cartésienne par :

$\vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$.

Nous en déduisons que les dérivées des vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ par rapport à θ sont respectivement :

$\dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = \vec{e}_\theta$ et $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_\rho$.

Une petite variation du vecteur $\overrightarrow{OM}$ donne :

$d\overrightarrow{OM} = d(\rho\vec{e}_\rho)$

$= d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,d\vec{e}_\rho$

$d\overrightarrow{OM} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,d\theta\,\vec{e}_\theta$.

L'élément de longueur en coordonnées polaires peut donc s'écrire :

$dl = \|d\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2}$.

L'élément de surface est donné par :

$ds = \rho\,d\rho\,d\theta$

5.3. Coordonnées cylindriques

Le point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) dans la base cylindre $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ avec $\overrightarrow{OM'} = \rho\vec{e}_\rho$ et $\varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{OM'})$ où M' est le projeté de M dans le plan (xOy) (Figure 1.6).

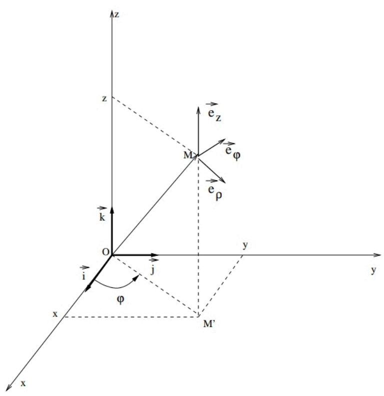

FIGURE 1.6: *Repère de coordonnées cylindriques*

Le vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$$

$$= \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$$

Les relations de transformation de coordonnées cylindriques en coordonnées cartésiennes sont les suivantes :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Nous en déduisons que les vecteurs de base cylindrique sont liés aux vecteurs de base cartésienne par :

$$\vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_z = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\varphi = \vec{k}$$

et les dérivées des vecteurs $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$et $\vec{e}_z$ par rapport à φ sont :

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi\ ;\ \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_\rho \quad et \quad \frac{d\vec{e}_z}{d\varphi} = \vec{0}$$

Une petit variation du vecteur $\overrightarrow{OM}$ donne :

$$\overrightarrow{dOM} = d(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z)$$

$$= d\rho\vec{e}_\rho + \rho\, d\vec{e}_\rho + dz\,\vec{e}_k$$

$$\overrightarrow{dOM} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho\, d\varphi\,\vec{e}_\varphi + dz\,\vec{e}_k$$

L'élément de longueur dl et l'élément de volume dv en coordonnées cylindriques peuvent donc s'écrire :

$$dl = \|\overrightarrow{dOM}\| = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2}$$

$$dv = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

5.4. Coordonnées sphériques

Le point M de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ telle que $\theta = (\vec{k}, \overrightarrow{OM})$ et $\varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{OM'})$ où M' est le projeté de M dans le plan (xOy) (Figure 1.7).

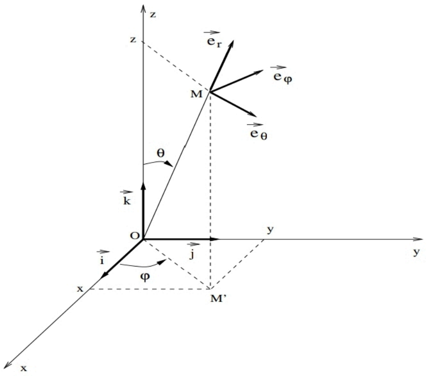

FIGURE 1.7: *Repère de coordonnées sphériques*

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est défini par :

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r.$

Le point M décrivant tout l'espace nous avons :

$r \in [0, +\infty[$ $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $\theta \in [0, \pi]$.

Les relations de transformation de coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes sont :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Nous en tirons l'expression de $\vec{e}_r$ dans la base cartésienne puis celle de $\vec{e}_\theta$ qui se déduit de $\vec{e}_r$ en remplaçant θ par $\dfrac{\pi}{2} + \theta$. Les vecteurs de base sphérique sont donc liées aux vecteurs de base cartésiennes par :

$$\vec{e}_r = \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}.$$

Les dérivées partielles des vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ par rapport à θ et à φ sont :

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = \vec{e}_\theta, \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = \sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta} = -\vec{e}_r, \qquad \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\varphi} = \cos\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\theta} = \vec{0}, \qquad \frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j} = -\sin\theta\vec{e}_r - \cos\theta\,\vec{e}_\theta.$$

Une petite variation du vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ donne :

$$d\overrightarrow{OM} = d(r\vec{e}_r)$$

$$= dr\,\vec{e}_r + rd\vec{e}_r$$

$$= dr\vec{e}_r + r\left(\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}d\varphi\right)$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\,\vec{e}_\varphi.$$

L'élément de longueur dl et l'élément de volume dv en coordonnées sphériques sont :

$$dl = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r\sin\theta d\varphi)^2}dv = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

6. Changement de base

Pour changer le repère dans lequel un vecteur $\vec{u}$ est exprimé, il faut exprimer les vecteurs de base du premier repère en fonction des vecteurs de base du deuxième repère et faire ensuite une substitution.

7. Opérateurs différentiels

Un opérateur est un objet mathématique qui agit sur d'autres objets mathématiques (fonction scalaire, fonction vectorielle, ...) dans un espace bien défini. Un opérateur différentiel est un opérateur agissant sur les fonctions différentiables.

Un champ de vecteurs ou fonction vectorielle est un vecteur dont les composantes sont des fonctions scalaires.

Exemple :

$$\begin{cases} f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \\ h(x,y,z) \end{cases}$$

$\vec{A}$ est un champ de vecteurs dont les composantes sont les fonctions scalaires f, g et h

7.1. Opérateur gradient

7.1.1. Définition

En coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le gradient de la fonction f, noté $\overrightarrow{grad}f$ est le vecteur défini par :

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{k}.$$

Soit M un point de l'espace et $f(x,y,z)$ la valeur d'une fonction scalaire f en ce point. En un point M' voisin de M, la variation de f peut s'écrire comme étant la différentielle :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

or le vecteur déplacement infinitésimal $\overrightarrow{dOM}$ est :

$$\overrightarrow{dOM} = d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}.$$

Nous en déduisons que :

$$df = \overrightarrow{grad}f.\,d\vec{l}$$

Le gradient de fonction f peut également s'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}f,$$

où $\vec{\nabla}$ est appelé vecteur nabla. En coordonnées cartésiennes nous avons :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

7.1.2. Propriété

Pour $f(x,y,z)=const$ nous avons $df=0$ alors $\overrightarrow{grad f}\perp\vec{dl}$; la surface $f(x,y,z)=const$ est appelée surface de niveau. Le vecteur unitaire normal à la surface de niveau est :

$$\vec{n}=\frac{\overrightarrow{grad f}}{\|\overrightarrow{grad f}\|}$$

7.1.3. Circulation d'un vecteur sur une courbe

Soit un champ vectoriel $\vec{F}$ dont le point d'application M se déplace le long d'une courbe $(\mathcal{C})$. La circulation de $\vec{F}$ sur la courbe $(\mathcal{C})$ est le scalaire défini par :

$$C=\int_{(\mathcal{C})}\vec{F}.\vec{dl}.$$

Si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire f alors

$$\vec{F}=-\overrightarrow{grad f},$$

et la circulation de $\vec{F}$ sur la courbe $(\mathcal{C})$ du point A vers le point B devient :

$$C=-\int_A^B\overrightarrow{grad f}.\vec{dl}=-\int_A^B df=f(A)-f(B).$$

$\mathbf{N.B.:}$ Si $\vec{F}$ est une force, la circulation de A à B représente le travail de $\vec{F}$ pour aller de A à B.

7.2. Opérateur divergence

7.2.1. Définition

Dans la base cartésienne $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, considérons un champ vectoriel

$$\vec{A}=f(x,y,z)\,\vec{i}+g(x,y,z)\,\vec{j}+h(x,y,z)\,\vec{k}$$

dont les composantes sont les fonctions scalaires f, g et h. La divergence de $\vec{A}$, notée $div\vec{A}$, est le scalaire défini par :

$$div\vec{A}=\vec{\nabla}.\vec{A}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}$$

7.2.2. Théorème de Green-Ostrograski

Le flux \varphi d'un champ vectoriel $\vec{A}$ à travers une surface S délimitant un volume V est :

$$\varphi=\iint_{(S)}\vec{A}.d\vec{S}=\iiint_{(V)}div\vec{A}\,dV.$$

7.3. Opérateur rotationnel

7.3.1. Définition

Dans la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considérons un champ vectoriel $\vec{A} = f(x,y,z)\,\vec{i} + g(x,y,z)\,\vec{j} + h(x,y,z)\,\vec{k}$ dont les composantes sont les fonctions scalaires f, g et h. Le rotationnel de $\vec{A}$, noté $\overrightarrow{rot}\vec{A}$, est le vecteur défini par :

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

7.3.2. Théorème de Stokes

La circulation C d'un champ de vectoriel $\vec{A}$ sur une courbe $(\mathcal{C})$ délimitant une surface S est :

$$C = \int_{(\mathcal{C})} \vec{A}.\, d\vec{l} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\vec{A}.\, d\vec{S}.$$

7.4. Opérateur laplacien

Le laplacien d'un champ scalaire f dérivable deux fois au moins, est le scalaire noté Δf et défini par :

$$\Delta f = \vec{\nabla}\vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Si $\Delta f = 0$ alors la fonction f est appelée fonction harmonique.

Le laplacien d'un champ de vecteur $\vec{A}$ dont les composantes A_x, A_y et A_z sont dérivables deux fois au moins, est défini par : $\Delta\vec{A} = \Delta A_x\,\vec{i} + \Delta A_y\,\vec{j} + \Delta A_z\,\vec{k}$.

8. Exercices d'entrainement

Exercice 1

Dans un repère orthonormé cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère trois points $A(2,-3,0), B(-3,0,1)$ et $C(0,1,2)$.

$1)$ Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$2)$ Calculer $\overrightarrow{AB}.\,\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}$ puis en déduire la mesure de l'angle $\alpha = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$.

$3)$ Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

$4)$ Calculer les moments des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ par rapport au point O.

Exercice 2

Dans un repère orthonormé cartésien$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère trois vecteurs $\vec{v}_1(3,-2,1)$, $\vec{v}_2(-1,4,-2)$ et $\vec{v}_3(x,y,z)$ où x, y et z sont des nombres réels. Soit le double produit vectoriel $\vec{w} = (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3$.

$1)$ Calculer par la méthode directe, les composantes de $\vec{w}$ en fonction de x, yet z.

$2)$ Retrouver le résultat précédent en appliquant la formule du double produit vectoriel.

$3)$ Calculer $\vec{w}' = vecv_1 \wedge (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$. Comparer $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ puis conclure.

Exercice 3

Dans un repère orthonormé cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$ on donne , $\overrightarrow{AB}(4,-1); A(1,2)etC(-1,3)$.

$1)$ Exprimer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$ dans la base polaire $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta)$ en fonction de θ.

$2)$ Calculer $\overrightarrow{OA}.\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$ dans la base cartésienne $(\vec{i},\vec{j})$ puis dans la base polaire $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta)$ et conclure.

$3)$ Calculer le moment de $\overrightarrow{BC}$ par rapport à A.

Exercice 4

$1)$ Établir les expressions des coordonnées cartésiennes (x,y,z) en fonction des coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) puis en fonction des coordonnées sphériques (r,θ,φ).

2) Établir les expressions des éléments de longueur $\vec{dl}$ et de volume dv dans chacun des trois systèmes de coordonnées ci-dessus.

Exercice 5

Calculer la différentielle df de la fonction numérique f dans les cas suivants :

1) $f(x) = 4x^5 + 2x^3 - x$

2) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

3) $f(x,y) = x^3y^2 + 3xy^3 + 2xy$

4) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

5) $f(x,y,z) = \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}$

Exercice 6

Montrer que :

1) $div(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = 0$

2) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}f) = \vec{0}$

3) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

4) $div(f\vec{A}) = (\overrightarrow{grad}f).\,\vec{A} + f\,div\vec{A}$

5) $\overrightarrow{rot}(f\vec{A}) = (\overrightarrow{grad}f) \wedge \vec{A} + f\,\overrightarrow{rot}\vec{A}$

6) Si $\vec{A}$ dévire d'un potentiel scalaire alors $\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{0}$

Exercice 7

1) Dans un repère orthonormé cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère un point $M(x,y,z)$ et $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OM}$ tels que $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}$.

2) Calculer $div\vec{u}$; $div\vec{r}$ et $\overrightarrow{grad}(\dfrac{1}{r})$.

On donne $\vec{A} = xz^2\vec{i} - y^2\vec{j} + 2x^2y\vec{k}$, calculer $div\vec{A}$ et $\overrightarrow{rot}\vec{A}$.

Exercice 8

Soit la fonction scalaire

$f(x,y,z) = 2x^2 - 3y^2 + z^2.$

$1)$ Calculer $\overrightarrow{grad} f$

$2)$ Déterminer le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la surface $f(x,y,z) = const$ au point $M(0, -\frac{1}{2}, 2)$
.

$3)$ Montrer que f est une fonction harmonique.

Exercice 9

On considère une fonction scalaire $f(\rho, \theta)$ de variables réelles ρ et θ.

$1)$ Établir l'expression de $\overrightarrow{grad} f$ et en déduire celle du vecteur nabla $\vec{\nabla}$ dans la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$.

$2)$ Écrire l'expression de Δf en coordonnées polaires.

Exercice 10

Établir les expressions des opérateurs différentiels gradient, divergence, laplacien de fonction scalaire et rationnel, en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques.