

Introduction

L'incertitude est indissociable de la vie économique. Les premiers économistes qui se sont intéressés à l'incertitude, ont commencé par privilégier une conception très extensive, conforme à leur vision du monde. L'univers l'a peut-être représenté par un ensemble fini de situations possibles et la connaissance des agents est limitée. Les différents courants de pensée vont chercher à répondre à la question suivante : Comment les agents se comportent-ils en situation d'incertitude ?

Qu'il s'agisse donc de décision privée ou publique, l'incertitude est le quotidien de l'agent économique. L'analyse de telle décision nécessite une théorie pour formaliser la prise en compte de conséquence aléatoire sur chaque alternative possible. Elle nécessite également de savoir quantifier cet aléa et comparer une situation à une autre.

Ce cours a pour objectif de fournir une introduction aux concepts et aux outils nécessaires à la prise de décision dans la situation d'incertitude en générale, plus spécifiquement en incertitude probabilisé.

Chapitre 1 : Incertitude et risque : l'espérance d'utilité.

Les théoriciens de l'incertitude indiquent clairement que l'économie ne peut être conçue sur le registre de la mécanique. L'introduction d'aléas dans le calcul du comportement de l'agent économique exige la définition de notions nouvelles telles que l'incertitude et le risque.

I-Distinction entre risque et incertitude.

La distinction entre situation de risque et d'incertitude est due à Knight (1921) dans son article *Risk, uncertainty and profit (1921)*. La différence pratique entre les deux catégories, le risque et l'incertitude, est que, s'agissant de la première, la distribution de résultat parmi un ensemble de cas est connue (soit par le calcul à priori, soit par des statistiques fondées sur la fréquence observée), tandis que ceci n'est pas vrai de l'incertitude en raison de l'impossibilité de regrouper les cas, parce que la situation à traiter présente un degré élevé de singularité.

- ***Une situation est risquée ou d'incertitude probabilisée** quand prévision peut se faire à partir de probabilité mathématique ou probabilité fréquentiste. Les probabilités mathématiques sont calculées à priori, comme dans les jeux du hasard où les chances sont égales. Les probabilités fréquentistes (induits de l'expérience) sont calculées à partir d'un grand nombre d'observations d'un événement qui se répète avec une certaine fréquence. (Exemple : le nombre de jours de pluie dans une année). Elles sont toutes deux qualifiées **de probabilité objectives**.
- **Une situation incertaine ou d'incertitude non probabilisable** est considérée comme unique et n'est pas réductible à un groupe de cas similaire, elle n'est donc pas probabilisable. La prévision repose donc sur deux exercices séparés de jugement :
 - Le premier consiste à former une estimation ou **un jugement personnel** (expérience personnelle, intuition).
 - Le second mesure la validité du jugement effectué, il dépend de la confiance que l'individu a dans son estimation. Ce degré de confiance ou de croyance est appelé probabilité épistémique; de grec épistémè qui signifie connaissance.

Utiliser les probabilités permet d'étendre à l'univers incertain le calcul et donc d'optimisation. Les situations singulières ne permettent pas l'usage des probabilités, il ne semble plus possible de modéliser le comportement en incertitude, ce qui explique l'importance pour les économistes la distinction entre risque et incertitude. Ce cours se focalisera davantage sur le choix en univers risqué.

II- Représentation de l'avenir incertain : retour sur l'utilité.

En univers certain, le choix de l'individu résulte de la maximisation de leur satisfaction ou leur fonction d'utilité. Dans un contexte d'incertitude, la théorie de l'utilité espérée permet de transposer ce modèle de décision. En univers certain, le choix du consommateur résulte de l'utilité calculée à partir de paniers de biens. En univers risqué et incertain, la disponibilité des biens n'étant pas garantie, le raisonnement s'effectue sur des loteries plutôt que sur des biens en récurrent à l'utilité espérée (UE). La notion d'utilité espérée est apparue en réponse au paradoxe de Saint-Pétersbourg soulevé par un jeu de hasard.

1-L'utilité espérée et le paradoxe de Saint-Pétersbourg

Pour comprendre la logique de la décision en avenir incertain (probabilisable), partons de Daniel Bernoulli (1700-1782), qui proposa de calculer **l'espérance de l'utilité des gains** et non pas **l'espérance de gains**, c'est-à-dire le résultat que l'on obtient directement par le calcul mathématique. Dans un jeu de hasard, un joueur lance une pièce de monnaie aussi longtemps que « **face** » apparaît et s'arrête dès qu'il obtient « **pile** ». Si pile sort dès le 1^{er} coup, il reçoit 2 ducats. Si pile ne sort qu'au deuxième coup, il reçoit 2² ducats, et pile sort qu'au n^{-ème} coup, il reçoit 2ⁿ ducats. Le problème consiste à évaluer le montant d'entrée maximal qu'un individu rationnel est prêt à payer pour participer à ce jeu. Un mathématicien propose de prendre pour référence l'espérance de gains, c'est-à-dire le gain moyen qu'il peut gagner.

Dans cette hypothèse, le joueur serait disposé à payer un droit d'entrée d'un montant égal à :

$$E(G) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2^2} \cdot 2^2 + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot 2^n + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots$$

Le nombre de coup de la partie n'étant pas limité, l'espérance de gains est infinie. Or Bernoulli a constaté que la plupart des joueurs n'acceptent de verser **qu'un montant très faible pour participer à ce jeu bien son espérance de gain soit infinie : Tel est le paradoxe de Saint-Pétersbourg**. Pour le résoudre, Bernoulli a proposé de prendre en compte l'utilité associée aux différents gains plutôt que de considérer leur espérance mathématique.

En effet, le joueur compare le coût de participation au jeu avec ce que le jeu est susceptible de lui rapporter. Or son utilité marginale décline et l'utilité d'un gain hypothétique de 2ⁿ par rapport à 2ⁿ⁺¹ lorsque n est élevé, est dérisoire (en raison de l'effet de risque, mais surtout de l'aversion au risque). Cette solution qui consiste à passer par la satisfaction procurée par un gain est l'un des fondements du **modèle de l'espérance de l'utilité**. Bernoulli transforme le jeu comme suit :

$$E(U(G)) = \frac{1}{2} U(2) + \frac{1}{2^2} U(2^2) + \dots + \frac{1}{2^n} U(2^n) + \dots$$

Afin d'exprimer la décroissance de l'utilité marginale, Bernoulli a suggéré de prendre la fonction Log pour représenter l'utilité, ce qui permet d'obtenir une suite dont la somme de bornée est égale à Log4. Le caractère paradoxal des réponses des joueurs disparaît si l'on admet que ceux-ci procèdent à un traitement non linéaire des résultats, ce qui permet la notion de l'utilité.

2-La notion de loterie

Dans le modèle de l'UE, la loterie la plus simple comprend deux lots (gagner le gain et ne rien gagner) auxquels sont associés deux probabilités dont la somme doit être égale à 1. Sans cette forme, la notion de loterie déborde très largement de celle des paniers de biens utilisé dans la théorie du consommateur. La loterie désigne aussi une conséquence possible d'une décision (c'est à dire un gain contingent). Par exemple : la décision de vente de parapluie ou de parasol, le chiffre d'affaire dépend de la météo, (« il fait beau temps », « il pleut »)

L'incertitude attaché au chiffre d'affaires est sous forme d'une loterie

$L[(prob, C_1); (prob, C_2)]$ si C_1 est nommée loterie ou conséquence. Soit L_1 la loterie correspondant à la vente des parapluies. On a $L_1[(prob1, C_{11}); (1 - prob1, C_{12})]$, avec prob1 la probabilité qu'il fasse beau, 1-prob1 la probabilité qu'il pleuve.

C_{11} = gain obtenu de la vente s'il fait beau.

C_{12} = gain obtenu de la vente s'il pleut.

La loterie de vente de parasol (L_2 est identique)

3)La Règle de décision

L'utilité d'une loterie de type $L_1[(prob1, C_{11}); (1 - prob1, C_{12})]$, dépend de l'ensemble des conséquences. L'utilité de chaque loterie s'exprime, donc comme l'espérance mathématique de l'utilité des conséquences pondérées par les probabilités de réalisation.

L'espérance d'utilité d'une loterie L_j (noté $EU(L_j)$) est la suivante.

$$EU(L_j) = \sum_{i=1}^2 prob_i U(C_{ji})$$

Où $prob_i$ désigne la probabilité associée à la réalisation de l'évènement i et $U(C_{ji})$ l'utilité à accorder à l'espérance de la loterie L_j lorsque l'évènement i se réalise.

C'est la fonction d'utilité espérée ou fonction VNM (Von Neuman-Morgersten) dans sa forme la plus sommaire.

L'agent étant confronté à un choix, il faut étendre le raisonnement à l'ensemble des loteries. Est sélectionnée celle qui lui procure l'espérance d'utilité la plus grande. Ceci permet de montrer le principe de maximisation.

Exemple 1 :

Un automobiliste a un choix entre deux trajets, passe par le pont HKB ou FHB. Pour chaque trajet, 3 états de la circulation sont envisageables : fluide, chargé et embouteillé. L'espace s'identifiant à la durée des trajets.

Le tableau suivant donne l'utilité associée à chaque trajet conditionnellement à chaque état de la circulation.

	Fluide	Chargé	Embouteillé
Pont FHB	100	70	15
Pont HKB	90	60	5

Les probabilités associées :

	F	C	E
FHB	1/3	1/3	1/3
HKB	3/4	0	1/4

L'utilité espérée de chaque trajet est :

$$U(FHB) = (1/3 \cdot 100) + (1/3 \cdot 70) + (1/3 \cdot 15) = 61,67$$

$$U(HKB) = (3/4 \cdot 90) + (0 \cdot 60) + (1/4 \cdot 5) = 68,75$$

Choix = HKB ?

Exemple 2 :

Demande de projet	Elevé (0,2)	Moyenne (0,5)	Faible (0,3)
A Tramway	100	50	30
B Bus électrique	65	70	40
C Métro	35	45	50

$$P(X = x) = \{0,2; 0,5; 0,3\}$$

$$U = \ln(x)$$

$$EU(A) = 0,2\ln 100 + 0,5\ln 50 + 0,3\ln 30 = 3,9$$

$$EMG(B) = EU(B) = 4,1$$

$$EMG(C) = EU(C) = 3,0$$

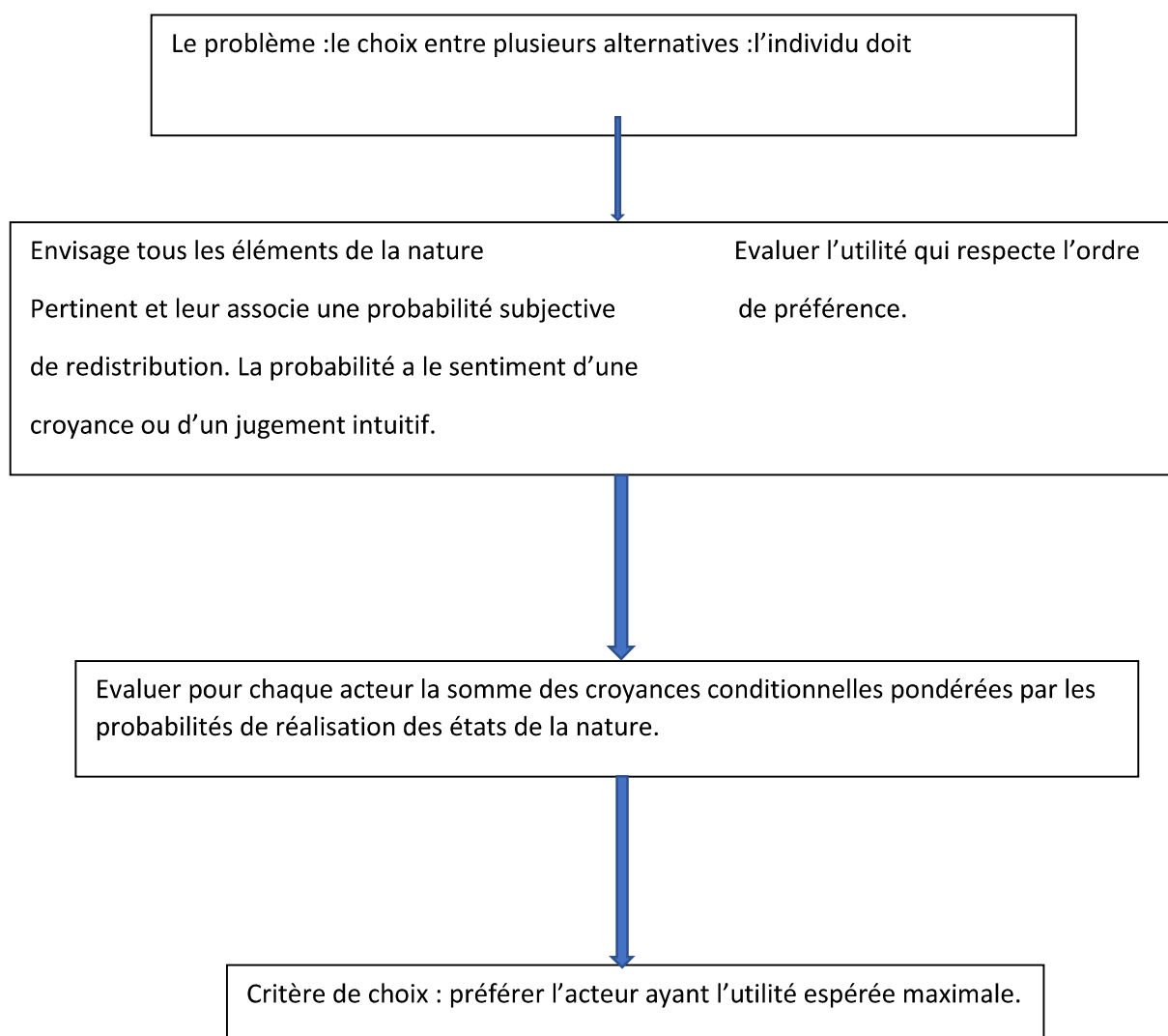
2) L'extension aux situations d'incertitude

Le modèle d'utilité espérée de VNM propose une théorie de la décision sur la base de probabilité objective (risque). D'autres travaux, comme ceux Savage, Ascorba et Aumann ont étendu le modèle de l'utilité espérée à l'ensemble des situations incertaines, en introduisant les notes de probabilité subjective.

En faisant de toute probabilité une croyance, Savage rend caduque la distinction risque et incertitude et le modèle SEU (Subjective Expected utility) de Savage englobe celui de UE de VNM. Pour lui tout choix de distribution de probabilité est subjectif, donc toute décision prise sur la base d'une Loi de probabilité l'est également.

La probabilité subjective s'analyse comme des copies, en information imparfaite, des probabilités objectives (Harshgyl et Harsanyi).

Schéma-Décomposition du comportement du décideur rationnel.



Exercice :

Yao a le choix entre deux emplois. Avec $U(x) = x^{1/2}$

	Temporaire	Fixe CDI
Adjamé	(1/2,1200)	(1/2,1400)
Abobo	(1/4,700)	(3/4,1500)

Où allez-vous les conseiller de travailler ?

$$U(A) = \frac{1}{2}U(1200) + \frac{1}{2}U(1400) = \frac{1}{2}\sqrt{1200} + \frac{1}{2}\sqrt{1400} = 36,03$$

$$U(B) = \frac{1}{4}U(700) + \frac{3}{4}U(1500) = \frac{1}{4}\sqrt{700} + \frac{3}{4}\sqrt{1500} = 35,66$$

Elle choisira de travailler à Abobo.

Elle demande conseil à son frère aîné Koffi

$U(x) = x \Rightarrow$ fonction d'utilité.

$$U(A) = \frac{1}{2} \cdot 1200 + \frac{1}{2} \cdot 1400 = 1300$$

$$U(B) = \frac{1}{4} \cdot 700 + \frac{3}{4} \cdot 1500 = 1300$$

==== difficile de conseiller

Ainsi, ===== et le deuxième emploi.